СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА КАЛИБРОВОЧНОЙ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ТРЕХМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

С.Н. Вергелес

PACS numbers: 05.50.+q

I. Формулировка задачи

A. Алгебра Дирака-Клиффорда в матричном представлении

Образующие алгебры Клиффорда $\{\xi_x\}$ удовлетворяют соотношениям

$$\xi_x\xi_y + \xi_y\xi_x = 2\delta_{x,\,y},$$
$$x,\, y,\, \ldots = 1,\, \ldots\, , I = 2K, \qquad (1.1)$$

и они предполагаются эрмитовыми матрицами размерности $2^{I/2}$. Из алгебры (1.1) немедленно следует, что след от любого произведения нечетного числа ξ-матриц равен нулю, и

$$\operatorname{tr} \xi_x\xi_y = 2^{I/2}\delta_{x,y},$$
$$\operatorname{tr} \xi_x\xi_y\xi_z\xi_v = 2^{I/2}\big(\delta_{x,y}\delta_{z,v} - \delta_{x,z}\delta_{y,v} + \delta_{x,v}\delta_{y,z}\big), \qquad (1.2)$$

и т.д.

Отсюда следует, что след от какого либо произведении ξ-матриц равен $\pm 2^{I/2}$ тогда и только тогда, когда каждая из ξ-матриц в этом произведении имеет четную полную степень. В противном случае след от этого произведения равен нулю.

Обозначения:

Вершина решетки $\mathfrak{v}_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x} \equiv (m,\, n,\, l)$,

$$m = 1,\, \ldots,\, M, \quad n = 1,\, \ldots,\, N, \quad l = 1,\, \ldots,\, L. \tag{1.3}$$

Базисные векторы решетки:

$$\mathbf{e}_1 = (1,\, 0,\, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0,\, 1,\, 0), \quad \mathbf{e}_3 = (0,\, 0,\, 1).$$

$\mathfrak{l}_{\mathbf{x},\, i} = \mathfrak{l}_{m,\, n,\, l;\, i}$ — ребро, соединяющее вершины $\mathfrak{v}_{\mathbf{x}}$ и $\mathfrak{v}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_i}$;

$\mathfrak{f}_{\mathbf{x},\, i}$, — грань с вершинами

$(\mathbf{x},\, \mathbf{x}+\mathbf{e}_j,\, \mathbf{x}+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k,\, \mathbf{x}+\mathbf{e}_k)$,

причем скалярные произведения

$$\big(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j\big) = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k) = 0.$$

Совокупность образующих алгебры Клиффорда состоит из трех групп. Образующие первой группы обозначаются $\{\alpha_{\mathbf{x}}\}$, второй — $\{\beta_{\mathbf{x}}\}$, третьей — $\{\gamma_{\mathbf{x}}\}$. Каждому ребру $\mathfrak{l}_{\mathbf{x},\, 1}$ сопоставляется матрица $\alpha_{\mathbf{x}}$, ребру $\mathfrak{l}_{\mathbf{x},\, 2}$ — матрица $\beta_{\mathbf{x}}$ и ребру $\mathfrak{l}_{\mathbf{x},\, 3}$ — матрица $\gamma_{\mathbf{x}}$. Используется запись:

$$\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{x}} = \xi_{\mathbf{x}}^{(i)} = (\alpha_{\mathbf{x}},\, \beta_{\mathbf{x}},\, \gamma_{\mathbf{x}})\,, \quad i = 1,\, 2,\, 3. \tag{1.4}$$

Сопоставим каждой грани унитарную матрицу поворота в спинорном представлении:

Грани $\mathfrak{f}_{\mathbf{x},\,1}$ — матрицу

$$U^{(1)}_{(m,n,l)} \equiv \left(\lambda + \mu\,\beta_{\mathbf{x}}\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}\right)\left(\lambda + \mu\,\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3}\gamma_{\mathbf{x}}\right), \tag{1.5}$$

грани $\mathfrak{f}_{\mathbf{x},\,2}$ — матрицу

$$U^{(2)}_{(m,n,l)} \equiv \left(\lambda + \mu\,\alpha_{\mathbf{x}}\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}\right)\left(\lambda + \mu\,\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3}\gamma_{\mathbf{x}}\right), \tag{1.6}$$

и грани $\mathfrak{f}_{\mathbf{x},\,3}$ — матрицу

$$U^{(3)}_{(m,n,l)} \equiv \left(\lambda + \mu\,\alpha_{\mathbf{x}}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}\right)\left(\lambda + \mu\,\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}\beta_{\mathbf{x}}\right). \tag{1.7}$$

Здесь

$$\mathbf{x} = (m,\,n,\,l), \quad \lambda = \cos\frac{\psi}{2}, \quad \mu = \sin\frac{\psi}{2}. \tag{1.8}$$

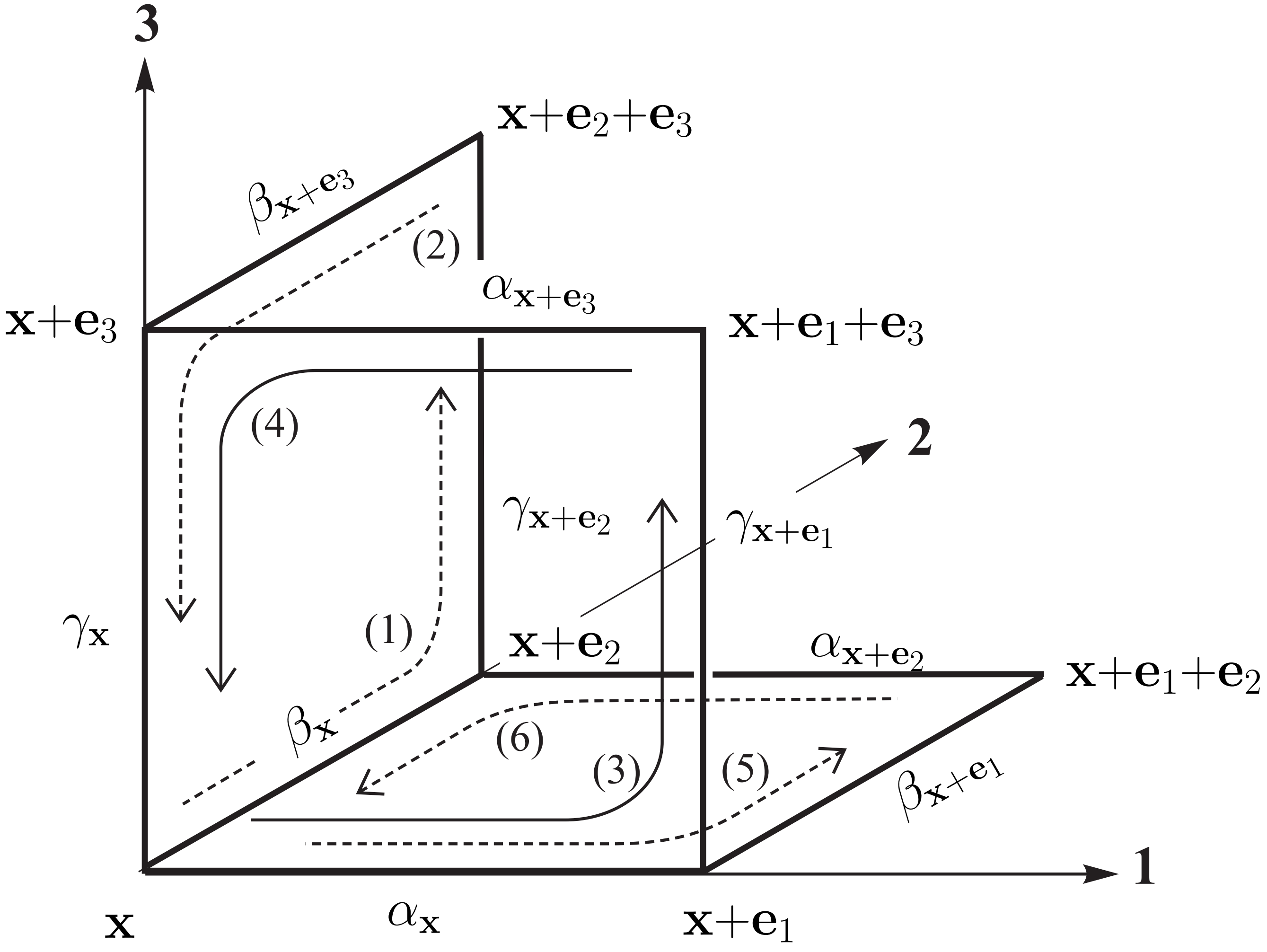

Рис. 1

Соответствующий фактор:

$$U_{(m,\,n,\,l)} \equiv U^{(1)}_{(m,\,n,\,l)} U^{(2)}_{(m,\,n,\,l)} U^{(3)}_{(m,\,n,\,l)} =$$

$$= \Big[\left(\lambda + \mu\, \beta_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}\right) \left(\lambda + \mu\, \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \gamma_{\mathbf{x}}\right) \Big] \times$$

$$\times \Big[\left(\lambda + \mu\, \alpha_{\mathbf{x}} \gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}\right) \left(\lambda + \mu\, \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \gamma_{\mathbf{x}}\right) \Big] \times$$

$$\times \Big[\left(\lambda + \mu\, \alpha_{\mathbf{x}} \beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}\right) \left(\lambda + \mu\, \alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \beta_{\mathbf{x}}\right) \Big].$$

Определение статистической суммы:

$$Z = C\,\mathrm{tr}\,\mathcal{U}, \tag{1.9}$$

$$\mathcal{U} = \left(\hat{P}\prod_{l}\right)\mathcal{U}_{(l)}, \tag{1.10}$$

$$\mathcal{U}_{(l)} = \left(\hat{P}\prod_{n}\right)\mathcal{U}_{(n,\,l)}, \tag{1.11}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{U}_{(n,\,l)} = \left(\hat{P}\prod_{m}\right)U_{(m,\,n,\,l)} = \\ = \ldots U_{(m-1,\,n,\,l)}U_{(m,\,n,\,l)}U_{(m+1,\,n,\,l)}\cdots.\end{gathered} \tag{1.12}$$

Здесь C — некая числовая константа.

Рассмотрим вклад в $\mathcal{U}$ от простейшей замкнутой поверхности без самопересечений: элементарного кубика с гранями $\mathfrak{f}_{\mathbf{x},1}$, $\mathfrak{f}_{\mathbf{x},2}$, $\mathfrak{f}_{\mathbf{x},3}$, $\mathfrak{f}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1,1}$, $\mathfrak{f}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2,2}$, $\mathfrak{f}_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3,3}$. Здесь порядок перечисления граней соответствует порядку построения из элементарных "кирпичиков" соответствующего слагаемого в $\mathcal{U}$. Таким образом

$$\begin{gathered}\Delta\mathcal{U} = \left(\beta_{\mathbf{x}}\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3}\gamma_{\mathbf{x}}\right)\left(\alpha_{\mathbf{x}}\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3}\gamma_{\mathbf{x}}\right)\times \\ \times\left(\alpha_{\mathbf{x}}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}\beta_{\mathbf{x}}\right)\times \\ \times\left(\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1}\right)\times \\ \times\left(\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2}\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}\gamma_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}\right)\times \\ \times\left(\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_3}\alpha_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3}\beta_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_3}\right) = 1. \qquad (1.13)\end{gathered}$$

В этом произведении каждая ξ-матрица содержится дважды.

Совокупность изогнутых под прямым углом жирных стрелок образует край поверхности. Сама же поверхность на рис. 2 есть заштрихованная грань с вершинами $\mathfrak{v}_2$, $\mathfrak{v}_3$, $\mathfrak{v}_4$, $\mathfrak{v}_6$.

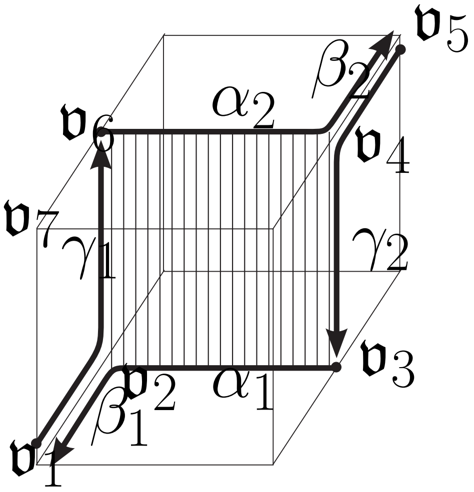

Рис. 2

Вклад от этой поверхности в $\mathcal{U}$ пропорционален выражению

$$\Delta_1\mathcal{U} =$$

$$(\beta_1\gamma_1)(\alpha_1\beta_1)(\alpha_1\gamma_2\alpha_2\gamma_1)(\beta_2\gamma_2)(\alpha_2\beta_2) =$$

$$= -1. \tag{1.14}$$

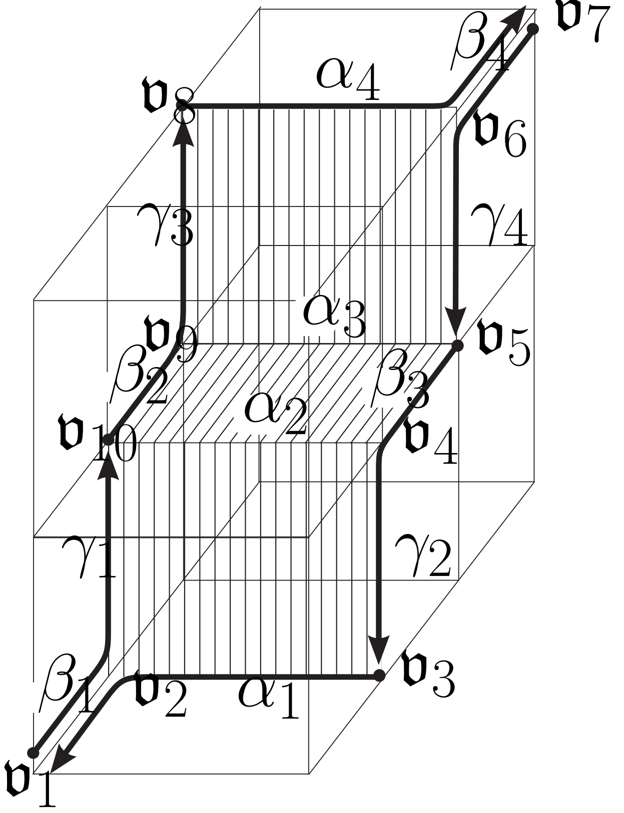

Рис. 3

Вклад от поверхности на рис. 3 в $\mathcal{U}$ пропорционален выражению

$$\Delta_2\mathcal{U} = (\beta_1\gamma_1)(\alpha_1\beta_1)(\alpha_1\gamma_2\alpha_2\gamma_1)\times$$
$$\times(\beta_3\gamma_2)(\beta_2\gamma_3)(\alpha_2\beta_3\alpha_3\beta_2)\times$$
$$\times(\alpha_3\gamma_4\alpha_4\gamma_3)(\beta_4\gamma_4)(\alpha_4\beta_4) = 1. \qquad (1.15)$$

Матрица поворота в спинорном представлении (1.10) может быть представлена в виде

$$\mathcal{U} = \exp\left(\frac{1}{4}\omega_{x,\,y}\,\xi_x\xi_y\right), \quad \omega_{x,\,y} = -\omega_{y,\,x}, \tag{1.16}$$

причем

$$\mathcal{U}^\dagger \xi_x \mathcal{U} = \mathcal{O}_{x,\,y}\xi_y,$$

$$\mathcal{O}_{x,\,y} \equiv \left(e^\omega\right)_{x,\,y} = \delta_{x,\,y} + \omega_{x,\,y} + \frac{1}{2!}\omega_{x,\,z}\omega_{z,\,y} + \ldots. \tag{1.17}$$

Пусть набор чисел

$$\left(\rho_1,\, \overline{\rho}_1,\, \rho_2,\, \overline{\rho}_2,\, \ldots,\, \rho_{3MNL/2},\, \overline{\rho}_{3MNL/2}\right) = \\ = \{\rho_k,\, \overline{\rho}_k\}, \quad k = 1,\, \ldots,\, 3MNL/2 \tag{1.18}$$

образует полный набор собственных значений матрицы $\mathcal{O}_{x,\,y}$. Тогда

$$\mathrm{tr}\,\mathcal{U} = \prod_{k=1}^{3MNL/2}\left(\sqrt{\rho_k} + \sqrt{\overline{\rho}_k}\right). \tag{1.19}$$

$$\rho_{1,\,2}(p,\,q,\,r) = \frac{-\eta \pm i\sqrt{4\chi\overline{\chi} - \eta^2}}{2\chi}, \qquad \rho_3 = 1. \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} \chi = 1 + e^{iq}\sin^3\psi + \\ + \left[e^{i(p+q)} + e^{i(p+r)} + e^{i(q+r)}\right]\cos^2\psi\sin^2\psi, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$\begin{gathered} \eta = \overline{\eta} = \left(1 - 3\cos^4\psi + \sin^6\psi\right) + \\ + \sin^3\psi\left(e^{iq} + e^{-iq}\right). \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$\mathcal{F} = -T\frac{MNL}{8\pi^3}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\,p\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\,q\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\,r\times$$
$$\times\ln\left\{\left(1-\sin^2\psi\right)\left[\sin^4\psi+2(\nu-1)\sin^2\psi+4\right]\right\},$$
$$\nu(p,\,q,\,r)\equiv\left[\cos(p+q)+\cos(p+r)+\cos(q+r)\right]. \tag{3.1}$$

Убывание температуры от бесконечности до нуля означает равномерное возрастание углового параметра ψ от нуля до $(\pi/2)$:

$$\frac{\mathrm{d}\,\psi(T)}{\mathrm{d}\,T}<0,\quad \psi(0)=\frac{\pi}{2},\quad \psi(\infty)=0. \tag{3.2}$$

Чтобы аргумент логарифма в (3.1) обратился в нуль, необходимо выполнение уравнения

$$x_c^2+2(\nu-1)x_c+4=0,\quad x\equiv\sin^2\psi. \tag{3.3}$$

Интерес представляют лишь вещественные решения в отрезке $0\le x_c\le 1$. Это возможно лишь при условии

$$-3 \leq \nu \leq -\frac{3}{2}. \tag{3.4}$$

Единственное решение имеет вид

$$x_c(\nu) = (1-\nu) - \sqrt{(1-\nu)^2 - 4}\,, \tag{3.5}$$

причем $\sqrt{x_c(\nu)}$ является монотонно растущей функцией на отрезке (3.4), так что

$$\sqrt{x_c(-3)} = \sin\psi_c = \sqrt{4-\sqrt{12}} < 1 \tag{3.6}$$

является ее минимальным значением, и

$$\sqrt{x_c(-3/2)} = \sin\psi_c = 1 \tag{3.7}$$

— максимально возможным значением.

Точка $\nu = -3$ является выделенной точкой в пространстве квазиимпульсов, поскольку она достигается лишь при двух значениях квазиимпульсов p, q, r:

$$p_c^{(1)} = q_c^{(1)} = r_c^{(1)} = \frac{\pi}{2},$$

$$p_c^{(2)} = q_c^{(2)} = r_c^{(2)} = -\frac{\pi}{2}. \tag{3.8}$$

Напротив, для всех значений ν на полуинтервале

$$-3 < \nu(p,\, q,\, r) \leq -\frac{3}{2} \tag{3.9}$$

имеется целый континуум значений квазиимпульсов.