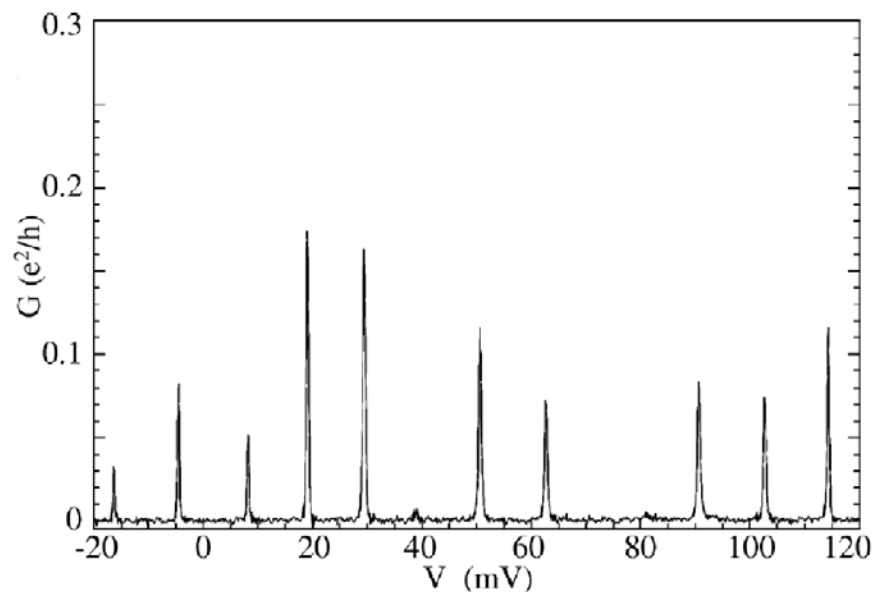
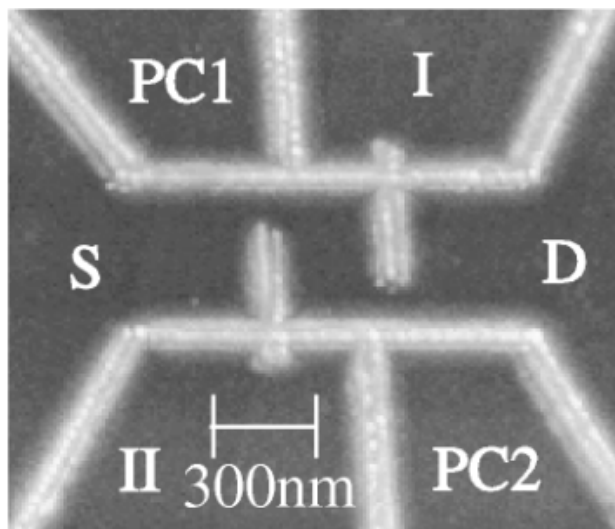


Спиновая восприимчивость и
туннельная плотность состояний
в квантовой точке с анизотропным
обменом

Азат Шарафутдинов, Д.С. Любшин,
И.С. Бурмистров
(ИТФ им. Л.Д.Ландау РАН)

Мотивация: транспорт в квантовых точках(КТ)

- проводимость $G = I / V_{bias}$ от напряжения на затворе

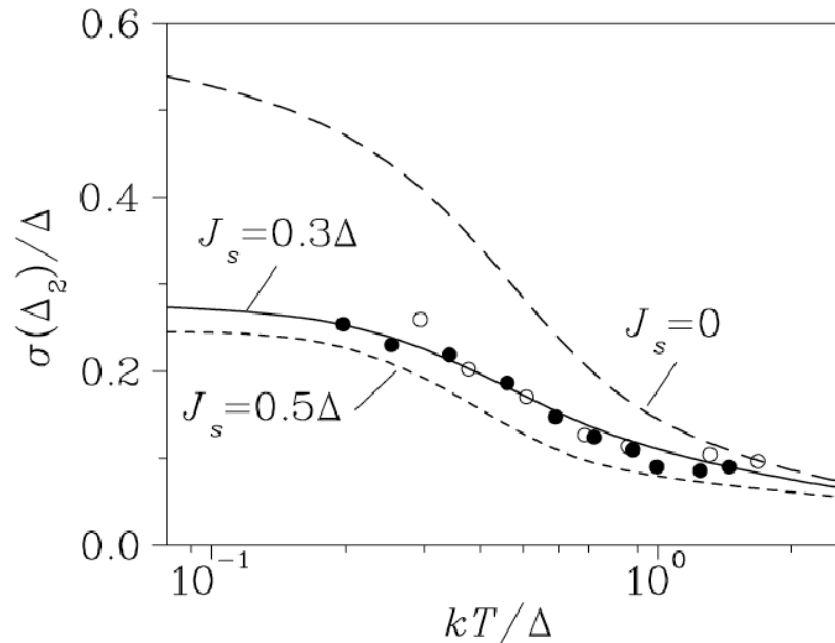


[рисунки из Lüscher et al.(2001)]

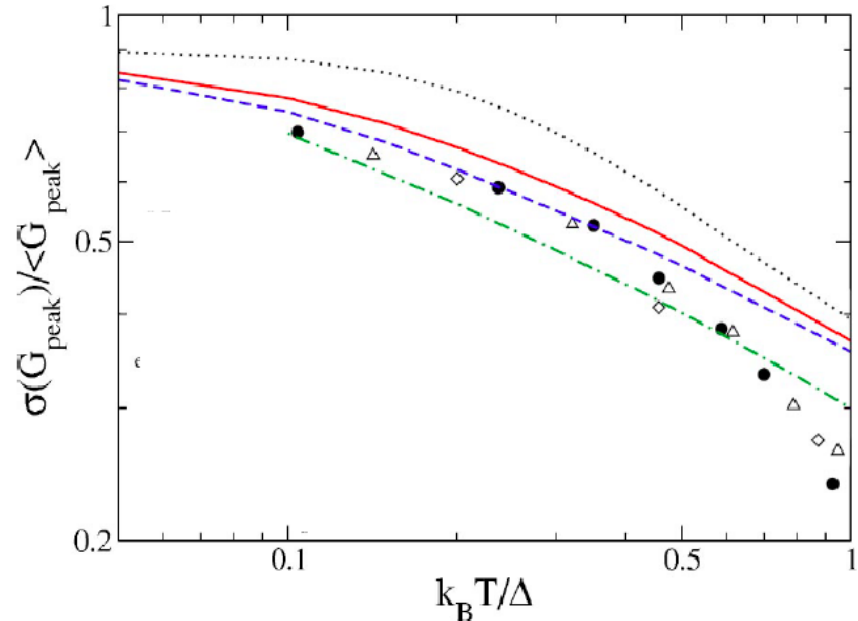
- температура $T = 120\text{mK}$
- расстояние между уровнями $\delta = 2.3\text{K}$
- зарядовая энергия $E_c = 14.5\text{K}$
- флуктуации высот и расстояний между пиками вызваны флуктуациями одночастичных уровней

Мотивация: влияние обменного взаимодействия

- подход уравнений на вероятности
- дисперсия расстояний между пиками
- дисперсия высот пиков



[рисунок из Alhassid, Rupp (2003)]



[рисунок из Usaj, Baranger (2003)]

- подход работает только при $\delta \gg T \gg g_{L,R} \delta$ где $g_{L,R}$ кондуктанс контактов
- для объяснения эксперимента нужен учет обменного взаимодействия $J \sim \delta/2$

Мотивация: универсальный гамильтониан/ влияние SO

- в металлическом режиме $E_{th} \gg \delta$ КТ описывается универсальным гамильтонианом
 - изотропный обмен без спин-орбитальной связи(SO) [$\Delta_{so} = 0$]

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} + E_c (\hat{N} - N_0)^2 + J \hat{S}^2$$

- изинговский обмен при сильной SO [$\Delta_{so} \rightarrow \infty$]

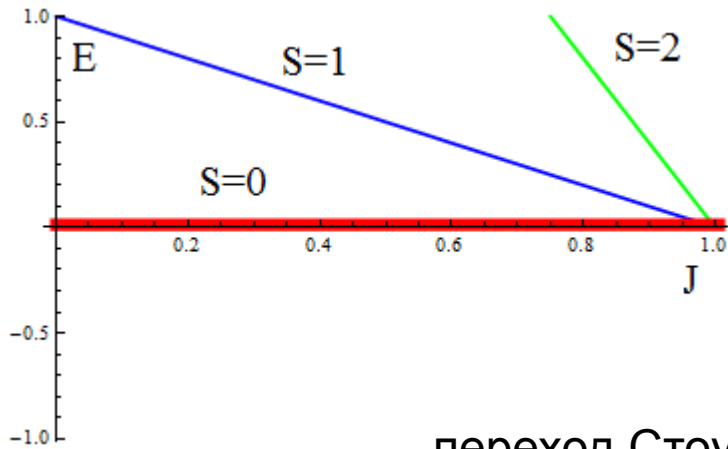
$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} + E_c (\hat{N} - N_0)^2 + J_z \hat{S}_z^2$$

$$\Delta_{so} \sim \sqrt{E_{Th} \delta} \quad \text{характерный масштаб кроссовера}$$

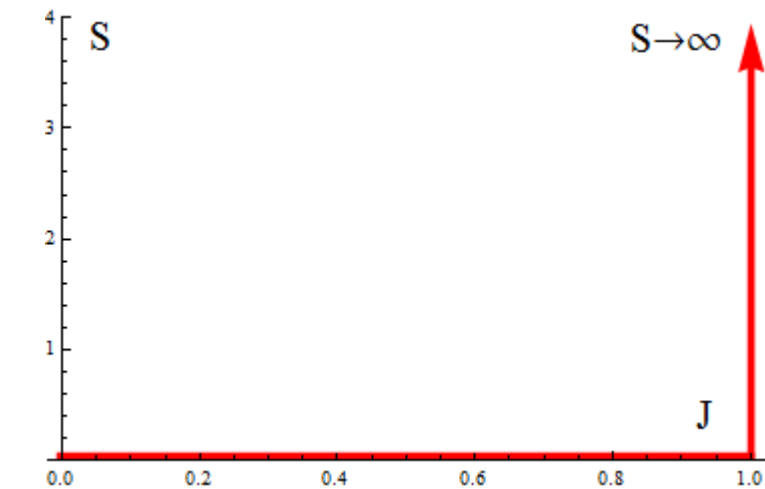
Мотивация: мезоскопическая стоунеровская неустойчивость (МезоСН)

- ИЗИНГОВСКИЙ ОБМЕН

$$E(S) = \delta S^2 - JS^2$$

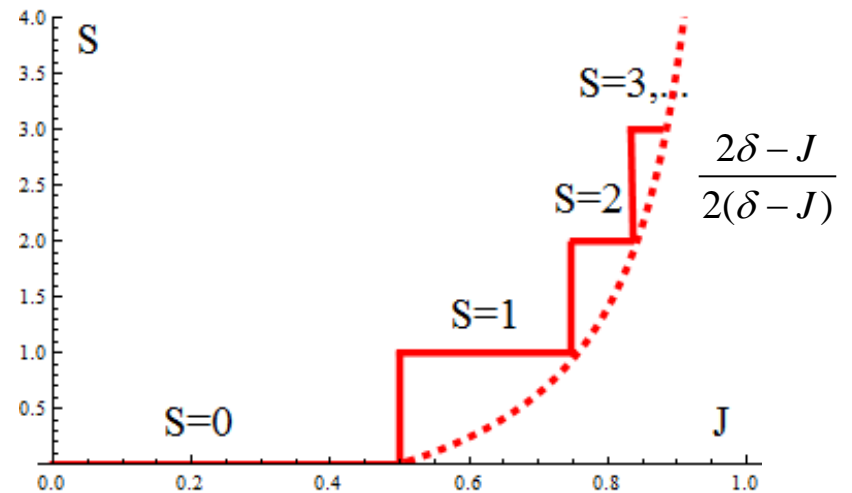
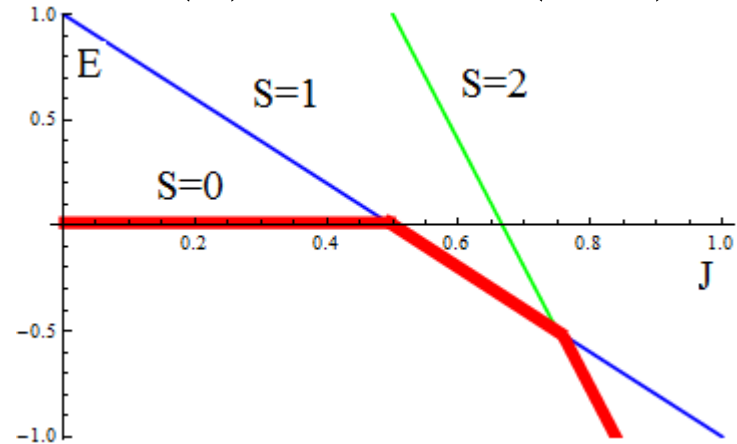


переход Стоунера



- ИЗОТРОПНЫЙ ОБМЕН

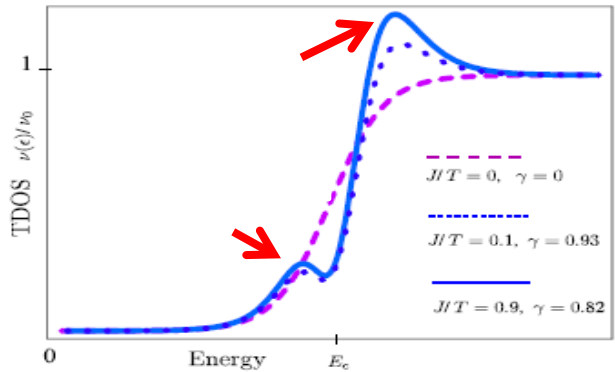
$$E(S) = \delta S^2 - JS(S+1)$$



Мотивация: что известно?

- случай Изинга
[Nissan-Cohen, Gefen, Kiselev, Lerner (2011)]

- теория возмущений
[Kiselev, Gefen (2006)]



Вычислялись:

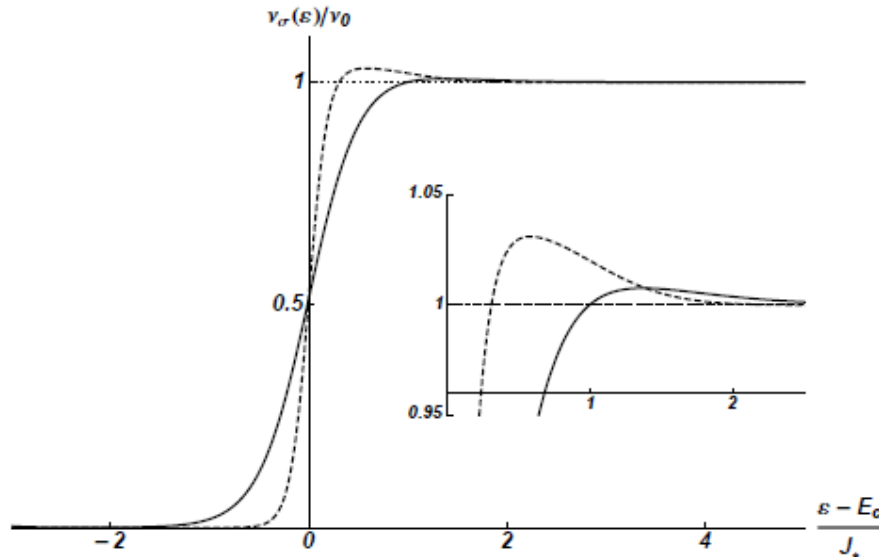
$$\chi_{zz}$$

$$\chi_{\perp}(\omega)$$

$$\nu(\epsilon)$$

$$H_S = -J \left\{ \left(\sum_{\alpha} S_{\alpha}^z \right)^2 + \gamma \left[\left(\sum_{\alpha} S_{\alpha}^x \right)^2 + \left(\sum_{\alpha} S_{\alpha}^y \right)^2 \right] \right\}$$

- изотропный обмен
[Burmistrov, Gefen, Kiselev (2012)]



Цели: Обобщение

$$\hat{H} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} + E_c (\hat{N} - N_0)^2 + J_z \hat{S}_z^2 + J_{\perp} \hat{S}_{\perp}^2 + b \hat{S}_z$$

изотропный случай $J_{\perp} = J_z = J$
случай Изинга $J_{\perp} = 0$

- проверить предыдущие результаты для Изинга
- учесть влияние флуктуаций одночастичных уровней
- посмотреть как исчезают проявления МезоСН в пределе $J_{\perp} \rightarrow 0$ в наблюдаемых

Постановка задачи

- Гамильтониан $\hat{H} = \sum_{\alpha} \varepsilon_{\alpha} \hat{a}_{\alpha}^{\dagger} \hat{a}_{\alpha} + E_c (\hat{N} - N_0)^2 + J_z \hat{S}_z^2 + J_{\perp} \hat{S}_{\perp}^2 + b \hat{S}_z$

- Найти

- туннельная плотность состояний

$$\nu(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \text{Im} \sum_{\alpha, \sigma} \int_0^{\infty} i e^{i\varepsilon t} \langle \{a_{\alpha\sigma}^{\dagger}(t), a_{\alpha\sigma}(0)\} \rangle dt$$

$$I = e \frac{g_l g_r}{g_l + g_r} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon [n_F(\varepsilon - \mu) - n_F(\varepsilon - \mu + eV)] \frac{\nu(\varepsilon)}{v_0}$$

- продольная спиновая восприимчивость

$$\chi_{zz}(b=0) = \frac{\langle S_z^2 \rangle}{T}$$

- поперечная спиновая восприимчивость

$$\chi_{\perp}(\omega) = \int_0^{\infty} e^{i\omega t} \langle [\hat{S}_+(t), \hat{S}_-(0)] \rangle dt$$

Результаты: общие выражения

- статистическая сумма $Z = \sum_{s=-m}^m \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} Z_{n_{\uparrow}} Z_{n_{\downarrow}} \exp(\beta\mu n + \beta J_{\perp} m(m+1) - \beta E_c (n - N_0)^2 - \beta b s + \beta (J_z - J_{\perp}) s^2)$

- продольная спиновая восприимчивость $\chi_{zz} = T \frac{\partial^2}{\partial b^2} \ln Z$
- поперечная спиновая восприимчивость

$$\chi_{\perp}(\omega) = -\frac{1}{Z} \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} Z_{n_{\uparrow}} Z_{n_{\downarrow}} e^{-\beta E_c (n - N_0)^2 + \beta J_{\perp} m(m+1) + \beta \mu n} \sum_{s=\pm} \frac{l - s[m(m+1) - l^2]}{\omega - b - (J_z - J_{\perp})(2l + s) + i0^+} \sum_{l=-m}^m e^{\beta (J_z - J_{\perp}) l^2 + \beta b l}$$

- туннельная плотность состояний

$$v_{\sigma}(\varepsilon) = \frac{1 + e^{-\beta \varepsilon}}{2Z} \sum_{n_{\uparrow}, n_{\downarrow}} Z_{n_{\uparrow}} Z_{n_{\downarrow}} e^{-\beta E_c (n - N_0)^2 + \beta \mu n + \beta J_{\perp} m(m+1)} \sum_{s=-m}^m e^{\beta (J_z - J_{\perp}) s^2 + \sigma \beta b s}$$

$$\times \sum_{\alpha} \left\{ \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\alpha\sigma} + \mu - E_c (2n - 2N_0 + 1) + J_{\perp} (m + 3/4) + (J_z - J_{\perp})(s - 1/4)) \frac{2m + 2 - 2s}{2m + 1} \frac{Z_{n_{\uparrow}}(\varepsilon_{\alpha})}{Z_{n_{\uparrow}}} \right. \\ \left. + \delta(\varepsilon - \varepsilon_{\alpha\sigma} + \mu - E_c (2n - 2N_0 + 1) - J_{\perp} (m + 1/4) + (J_z - J_{\perp})(s - 1/4)) \frac{m + s}{m} \left[\frac{Z_{n_{\downarrow}}(\varepsilon_{\alpha})}{Z_{n_{\downarrow}}} - \frac{Z_{n_{\uparrow}}(\varepsilon_{\alpha})}{(2m + 1)Z_{n_{\uparrow}}} \right] \right\}$$

где интегралы Дарвина- Фаулера $Z_N = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-N-1} \prod_{\gamma} (1 + z e^{-\beta \varepsilon_{\gamma}})$, $Z_N(\varepsilon_{\alpha}) = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{-N-1} \prod_{\gamma \neq \alpha} (1 + z e^{-\beta \varepsilon_{\gamma}})$

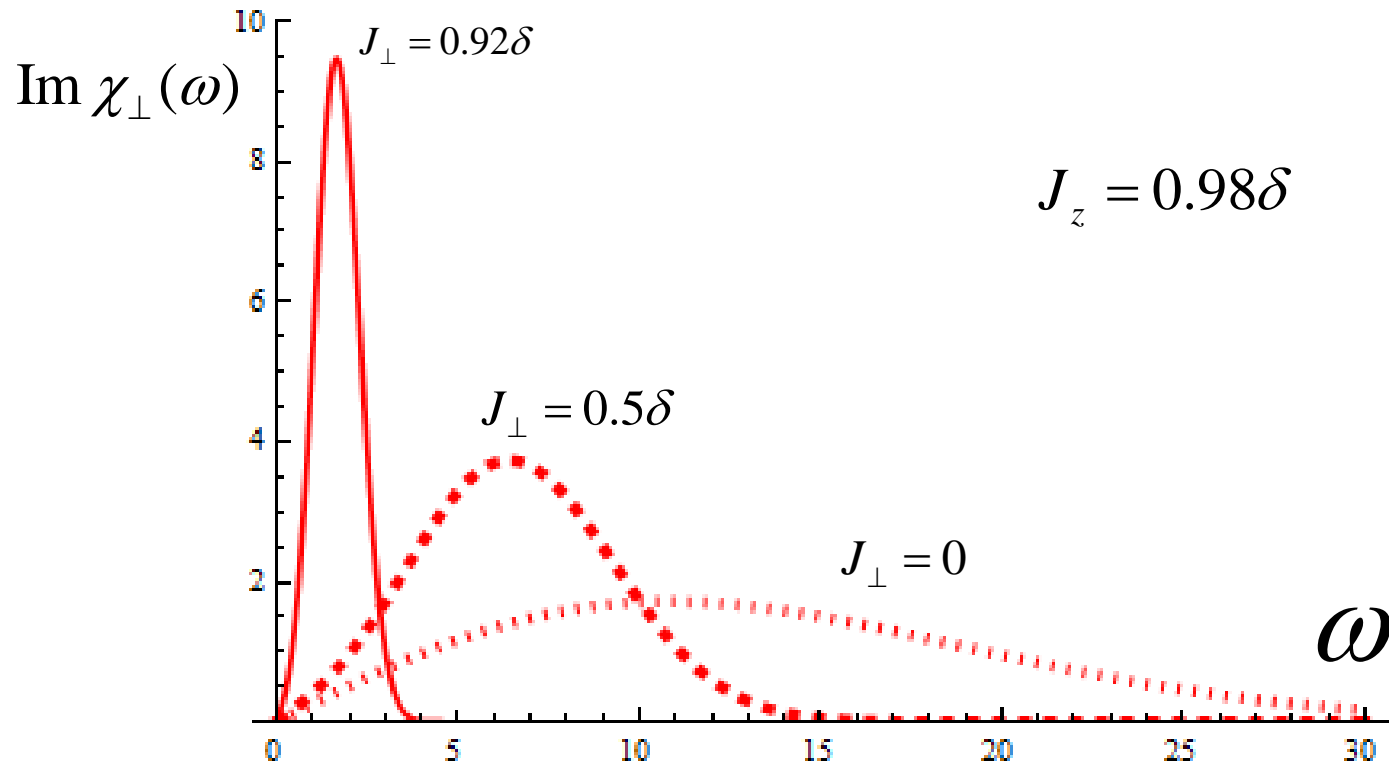
Результаты: $\delta \ll T$

- наш результат

$$\text{Im } \chi_{\perp}(\omega) = \frac{\sqrt{\pi\beta(\delta - J_z)}}{2J_z\delta} \omega e^{-\beta(\delta - J_z)\omega^2/4J_z^2}$$

- совпадает с

[Nissan-Cohen, Gefen, Kiselev, Lerner]



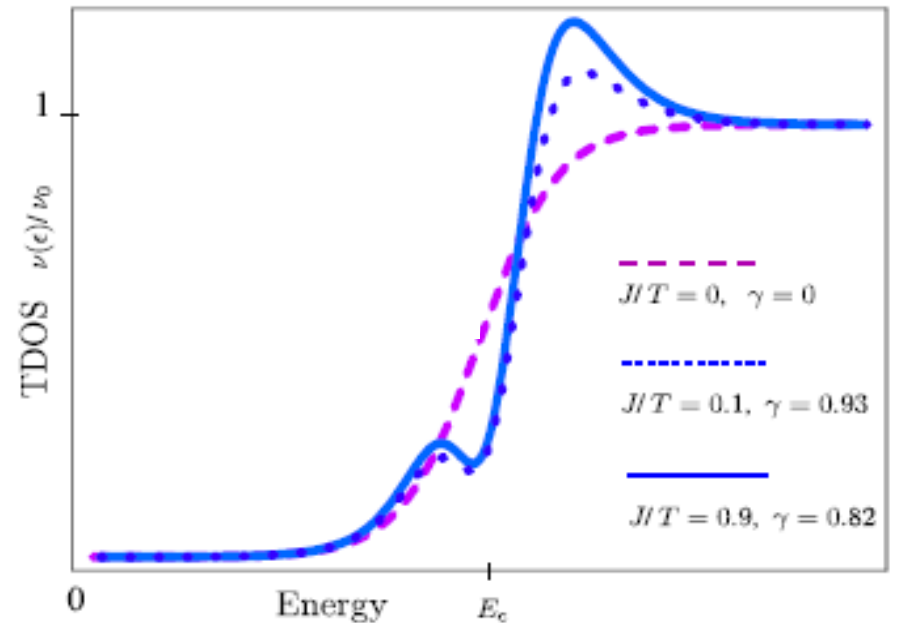
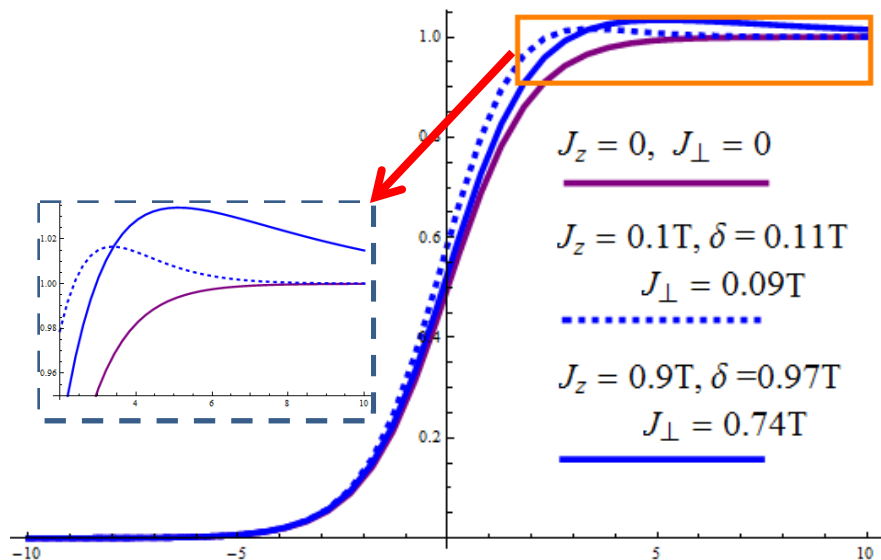
Результаты: $\delta \ll T$

- наш результат

$$\frac{\nu(\varepsilon)}{\nu_0} = \sum_{n,p=\pm} e^{-\beta E_c(n-N_0)^2} \left\{ f_F(p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p}) + \frac{1}{2Z} e^{\beta \bar{J}_\perp / 4} \left(\frac{\bar{J}_\perp}{J_z} \right)^{1/2} Y_+ \left(\frac{p\varepsilon - 2p\Omega_n^{-p}}{\bar{J}_\perp}, \beta \bar{J}_\perp, \frac{\delta(J_z - J_\perp)}{J_z(\delta - J_\perp)}, \sqrt{\frac{\beta J_\perp (J_z - J_\perp)}{J_z}} \right) \right\} / \sum_n e^{-\beta E_c(n-N_0)^2}$$

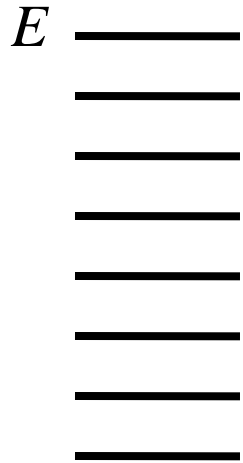
$$\Omega_n^p = E_c(n - N_0 + p/2) \quad Y_+(x, y, z, a) = \frac{a}{2\sqrt{\pi z}} \int_{-\infty}^{+\infty} db \frac{e^{-b^2}}{\sinh ab \cosh ab/2} \int_{-b\sqrt{z}}^{b\sqrt{z}} d\lambda e^{\lambda^2} \left[\frac{e^{-\lambda\sqrt{y}} e^{y/4}}{\cosh \frac{xy+ab}{2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-\kappa^2}}{\cosh \left(\frac{xy+ab}{2} + (\kappa+\lambda)\sqrt{y} \right)} \right]$$

- [Gefen, Kiselev (2006)]

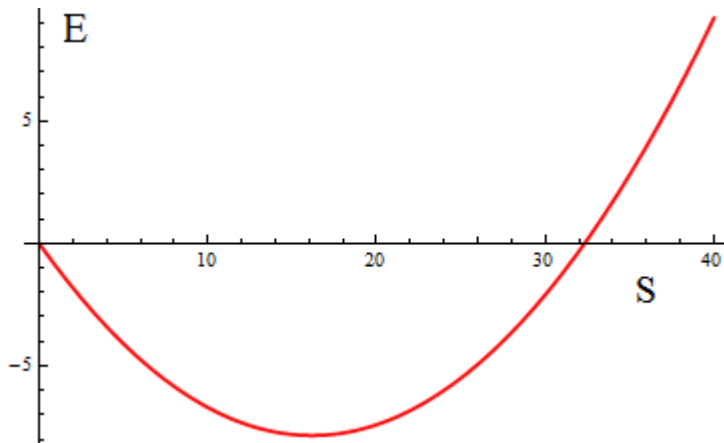


Учет флуктуаций

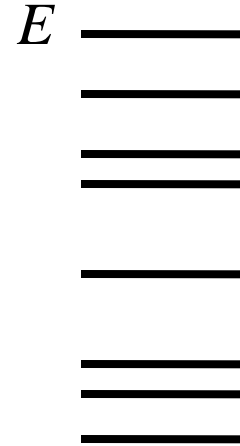
- эквидистантный спектр



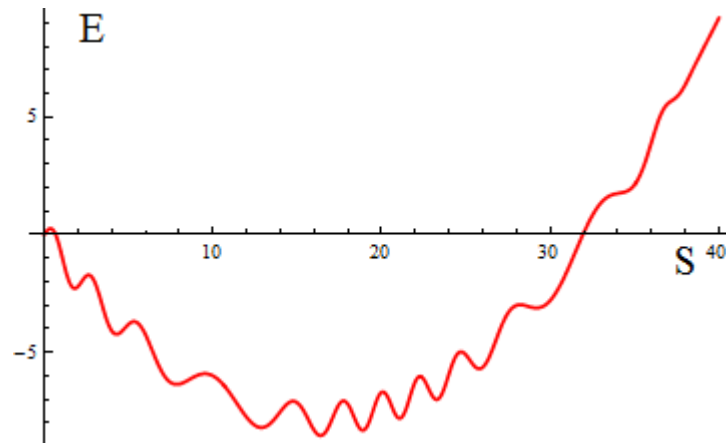
- энергия основного состояния с полным спином S для данной реализации



- случайный спектр

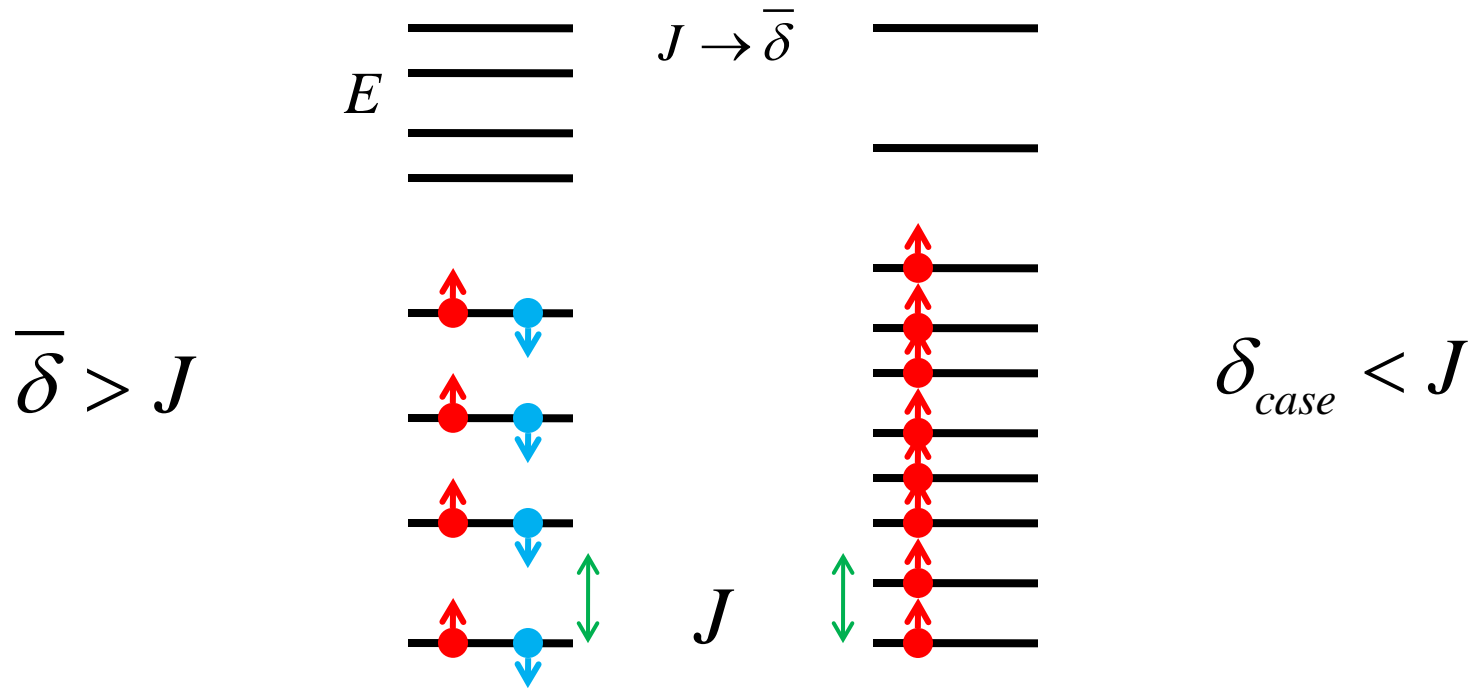


$$E(S) = \delta S^2 - JS(S+1) + V(S)$$



Учет флуктуаций: смещение перехода Стоунера?

- Есть реализации одночастичных уровней, при которых точка полностью поляризована в основном состоянии.



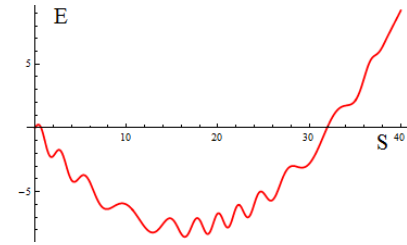
$$E(S) = \delta_{case} S^2 - JS(S + 1)$$

- Редкие события с $S \rightarrow \infty \Rightarrow \langle S \rangle \rightarrow \infty$ при $J' < \bar{\delta}$

Учет флуктуаций: теория случайных матриц

- флуктуации одночастичного спектра

$$V(S) = \int_{-S\delta}^{S\delta} (\text{sgn } \varepsilon - S\delta) \delta v(\varepsilon) d\varepsilon$$



- теория случайных матриц

$$\langle \delta v(E) \delta v(E + \omega) \rangle = \frac{1}{\delta^2} \left[\delta \left(\frac{\omega}{\delta} \right) - R_{O/U/S} \left(\frac{\pi \omega}{\delta} \right) \right]$$

$$E(S) = \delta S^2 - JS(S+1) + V(S)$$

$$R_{U/O/S} \left(\frac{\pi \omega}{\delta} \right) \approx \frac{1}{\beta \pi^2} \left(\frac{\delta}{\omega} \right)^2$$

$$\beta = 1, 2, 4 \quad \frac{\pi \omega}{\delta} \gg 1$$

- гауссова статистика с двухточечным коррелятором:

$$\langle V(S_1) V(S_2) \rangle = \frac{\delta^2}{\beta \pi^2} \left[-S_1^2 \ln S_1^2 - S_2^2 \ln S_2^2 + \frac{(S_1 + S_2)}{2} \ln (S_1 + S_2)^2 + \frac{(S_1 - S_2)}{2} \ln (S_1 - S_2)^2 \right]$$

$$S_1, S_2 \gg 1$$

[Aleiner, Altshuler, Kurland (2000)]

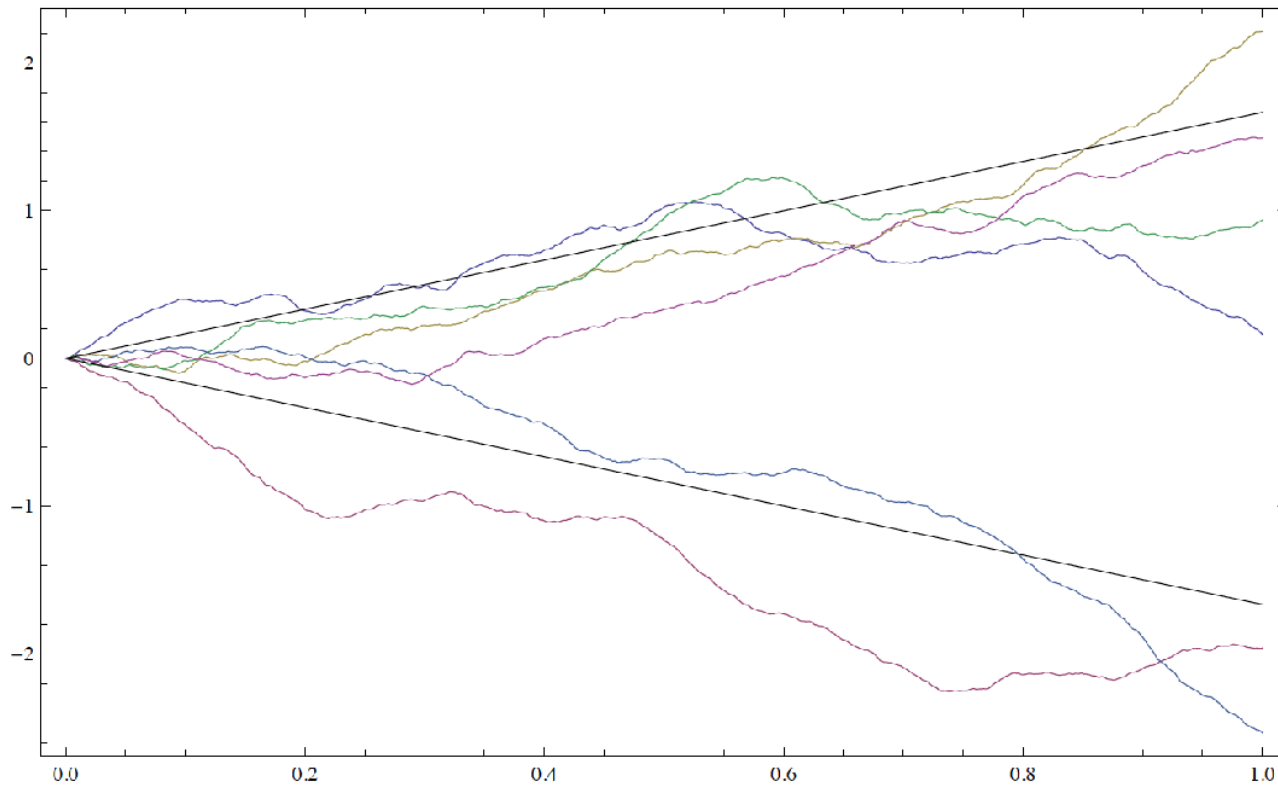
Учет флуктуаций: $T \gg \delta$

| $\beta = 1, 2, 4$ | случай Изинга $\chi_{zz} = \frac{1}{2(\delta - J_z)} [\dots]$ $y = \frac{J_z \delta}{(\delta - J_z)}$ | изотропный случай $\chi = \frac{1}{(\delta - J)} [\dots]$ $y = \frac{J \delta}{(\delta - J)}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Слабые флуктуации (высокие температуры) $y \ll 1$ | $1 + \frac{0.4}{\beta \pi^2} y^2$ | $1 + \frac{y}{6} + \frac{0.4}{\beta \pi^2} y^2$ [Burmistrov, Gefen, Kiselev] |
| Сильные флуктуации I (низкие температуры) $1 \ll y \ll \beta \pi^2$ | $1 + \frac{\ln 2}{\beta \pi^2} y$ | $\frac{y}{6} (1 + \frac{1}{\beta \pi^2} [\ln y + 3.3])$ [Burmistrov, Gefen, Kiselev] |
| Сильные флуктуации II ("сверх" низкие температуры) $\beta \pi^2 \ll y$ | $c(\beta) y$ | |

Учет флуктуаций: однородность коррелятора

$$\langle V(S_1)V(S_2) \rangle = \frac{\delta^2}{\beta\pi^2} \left[-S_1^2 \ln S_1^2 - S_2^2 \ln S_2^2 + \frac{(S_1 + S_2)}{2} \ln(S_1 + S_2)^2 + \frac{(S_1 - S_2)}{2} \ln(S_1 - S_2)^2 \right]$$

$$\langle V(aS_1)V(aS_2) \rangle = a^2 \langle V(S_1)V(S_2) \rangle$$



- случай Изинга

$$\chi_{zz} \sim \frac{\delta^2}{\beta\pi^2(\delta - J_z)^2} \quad \delta \ll T \ll \frac{\delta J_z}{\beta\pi^2(\delta - J_z)}$$

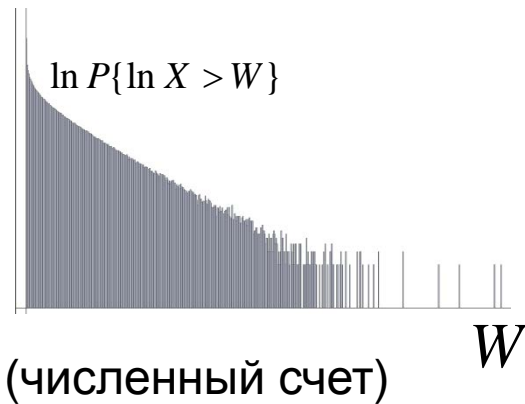
$$(\delta - J_z)S_{\min}^2 \sim V(S_{\min}) \sim V(1)S_{\min} \quad \langle V^2(1) \rangle \sim \frac{\delta^2}{\beta\pi^2}$$

$$\overline{\langle S^2 \rangle} \propto \frac{\delta^2}{\beta\pi^2(\delta - J_z)^2}$$

[Aleiner, Altshuler, Kurland(2000)] $T \ll \delta$

- аналитическая оценка
сверху для функции
распределения

$$Z \propto \left(\frac{\delta}{\delta - J_z} \right)^{1/2} X \quad P\{\ln X > W\} \leq \exp \left\{ - \frac{(1-\gamma)(W + \ln \sqrt{\gamma})}{(y \ln 2 / \beta\pi^2)} \right\} \quad 0 < \gamma < 1$$



$$P\{\ln X > W\} \propto \exp \left\{ - \frac{cW}{y / \beta\pi^2} \right\}$$

$$\overline{[\ln X]^N} \propto \overline{[\ln X]^N} \propto \left(\frac{y}{\beta\pi^2} \right)^N < \infty$$

- переход Стоунера не смещается(!)

Заключение

- точные ответы для спиновой восприимчивости и туннельной плотности состояний в КТ при наличии XXZ анизотропного обменного взаимодействия.
 - отсутствие дополнительных пиков в плотности состояний $\forall J_z, J_\perp < \delta$
- учёт флуктуаций одночастичных уровней в случае Изинга.
 - оценка сверху для спиновой восприимчивости при $J < \delta$