

Энергия основного состояния квантовых жидкостей

А.М. Дюгаев, П. Д. Григорьев

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Е.В. Лебедева

Институт физики твердого тела РАН

Письма в ЖЭТФ, том 98(1), стр. 38-42

Закон соответственных состояний для квантовых жидкостей

А. М. Дюгаев, ЖЭТФ **89**, 1220 (1985).

А. М. Дюгаев, Письма в ЖЭТФ **42**, 442 (1985);
ЖЭТФ **95**, 838 (1989).

А. М. Dyugaev, J.Low. Temp. Phys. **78**, 79 (1990).

Эксперименты по рассеянию быстрых нейтронов:
определение структурного фактора

$$S(k, \omega) = \frac{1}{n} \int \frac{n_p}{(2\pi)^3} \delta \left(\omega - \frac{k^2}{2M} + \frac{\vec{k}\vec{p}}{M} \right) d^3\vec{p},$$

n - плотность жидкости, M - масса атома

n_p · функция импульсного распределения атомов гелия.

Определение n_p из $S(k, \omega)$

– плохо поставленная задача для жидкого гелия

Структурный фактор рассеяния нейтронов в He4

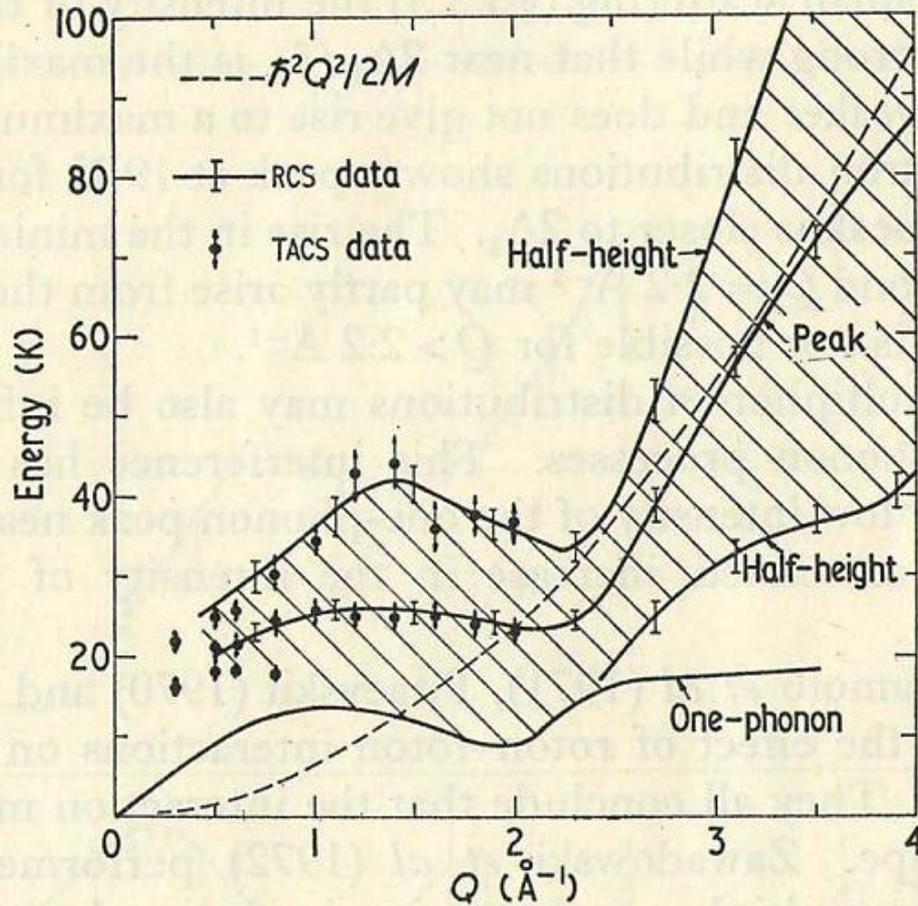


Figure 15. The energy against wave vector dependence of the scattering at intermediate Q at 1.1 K. From Cowley and Woods (1971).

Средняя кинетическая энергия частиц K :

$$K = \frac{\hbar^2}{2M} \bar{p}^2; \quad \bar{p}^2 = \frac{1}{n} \int \frac{n_p p^2}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}; \quad n = \int \frac{n_p}{(2\pi)^3} d^3 \vec{p}.$$

$$n_p \sim \exp\left(-\frac{\hbar^2 p^2}{2MT}\right)$$

Жидкий Ne при $T=30$ К:

$K=3/2T$ с точностью 10%.

Малость квантовых эффектов –
параметр де Бюра для неона мал:

$$\Lambda^2 = 0,36 \quad \Lambda^2 = \frac{h^2}{Mr_0^2 \epsilon_0}$$

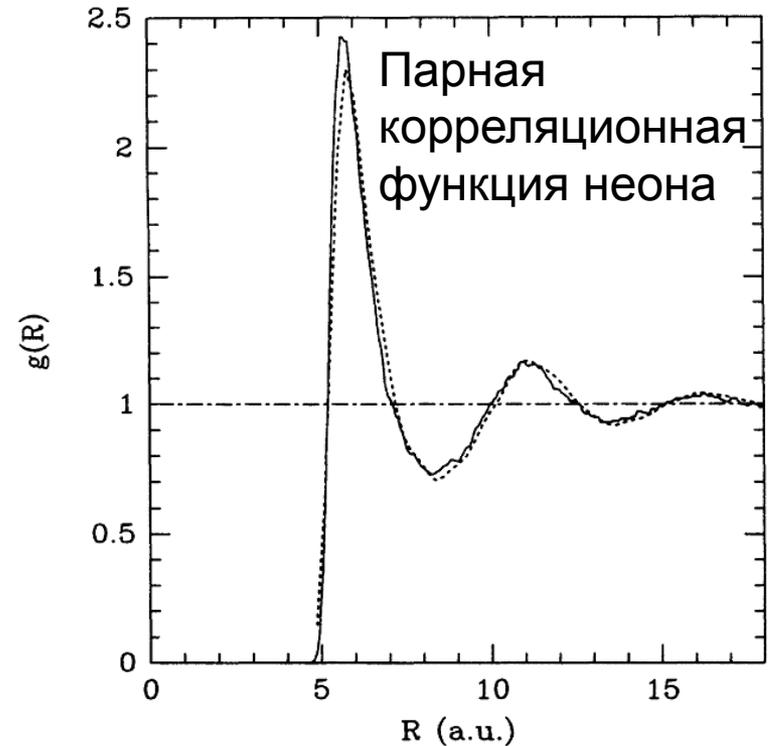


FIG. 1. Radial distribution function $g(R)$ of liquid neon at $T = 35$ K and $\rho = 3.17 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$. Solid line, calculated from classical MD simulations using the model pair potential of Ref. [11] [see Eq. (5) in the text]. Dotted line, experimental results of de Graaf and Mozer [13], as analyzed by Raveche and Mountain [14].

Параметры различных квантовых жидкостей

параметр де Буря $\Lambda^2 = \frac{h^2}{Mr_0^2\varepsilon_0}$

r_0, ε_0 - масштаб и глубина атом-атомного взаимодействия.

$$\text{He}^3 \quad \Lambda^2 = 9.5$$

$$\text{H}_2 \quad \Lambda^2 = 3$$

$$\text{He}^4 \quad \Lambda^2 = 7.2$$

$$\text{D}_2 \quad \Lambda^2 = 1.5$$

Для He^4 конденсатная фракция атомов мала ниже T_λ ,
она исчезает с ростом давления:

$$n_0 = 0.073 \quad p = 0 :$$

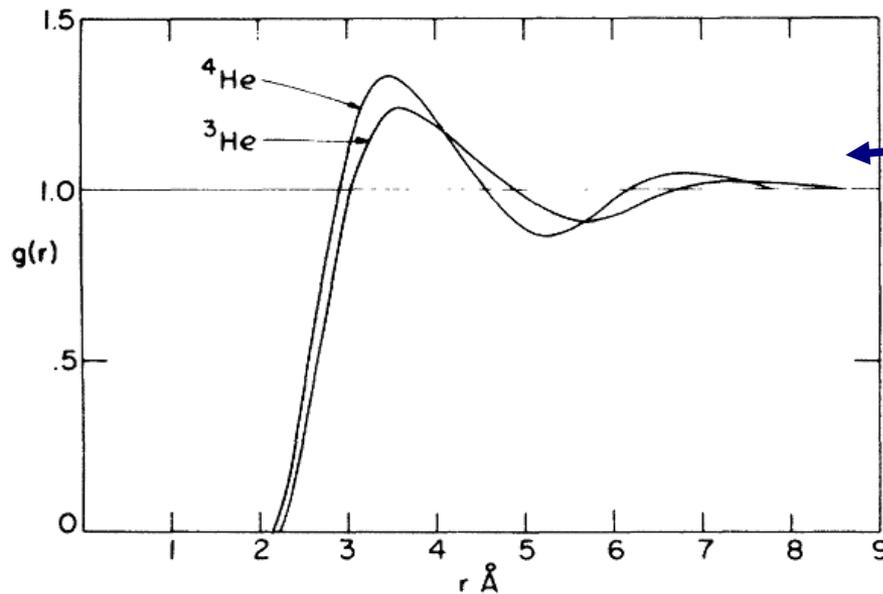
$$n_0 = 0.032 \quad p = 24 \text{ bar}$$

$$E(n, T) = K(n, T) + V(n, T) \quad - \text{ полная энергия атома}$$

$$V(n, T) = \frac{n}{2} \int v(r) g(r, n, T) d^3 \vec{r} \quad - \text{ потенциальная энергия}$$

$g(r, n, T)$ - парная корреляционная функция

$v(r)$ - потенциал межатомного взаимодействия



$g_3 g_4$ - хорошо определены при низких T и близки

FIG. 9. $g(r)$ for He^3 at $T=0.56$ K and He^4 at $T=0.79$ K.

g_3 и g_4 близки также по результатам численного счета и слабо зависят от статистики атомов

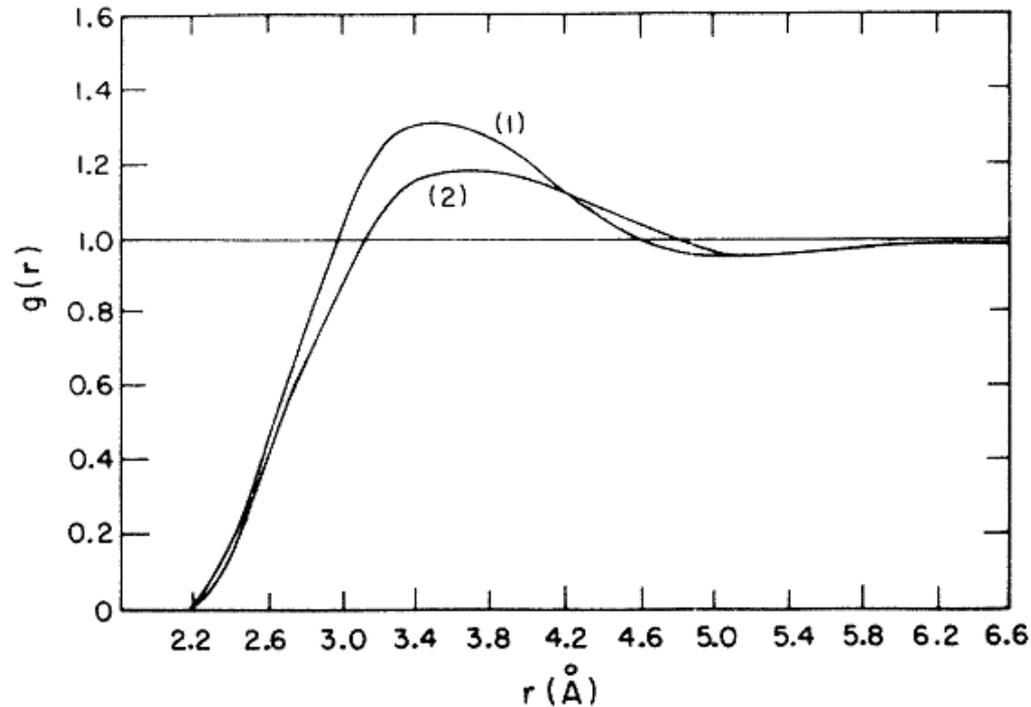
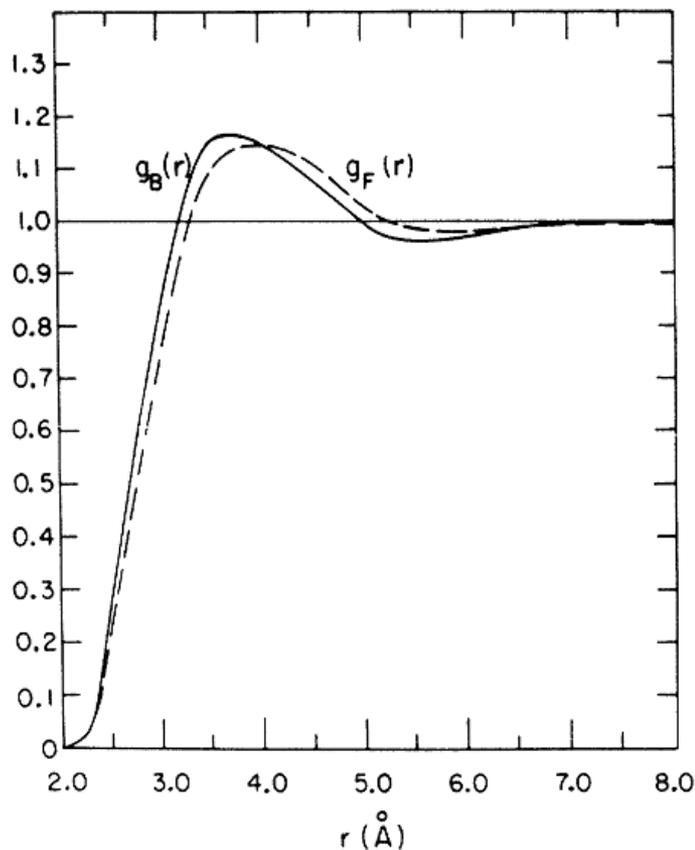


FIG. 10. $g(r)$ calculated by Massey (Ref. 16). (1) He^4 . (2) boson He^3 .

Другой численный счет



Разумное приближение

$$V_3(n, 0) = V_4(n, 0) \equiv V^0(n)$$

В пределе $\Lambda^2 \gg 1$

$$K_3^0(n) = \frac{4}{3} K_4^0(n)$$

FIG. 11. $g(r)$ calculated by Woo (Ref. 17). $g_B(r)$, boson He^3 . $g_F(r)$, fermion He^3 .

В результате такого приближения получаем

$$V^0(n) = 4E_4^0(n) - 3E_3^0(n);$$

$$K_4^0(n) = 3(E_3^0(n) - E_4^0(n))$$

Энергии основных состояний $E_4^0(n)$, $E_3^0(n)$ определены на опыте с очень хорошей точностью по зависимости давления p и скорости звука u от плотности

$$p = n^2 \frac{\partial E^0}{\partial n}; \quad Mu^2 = \frac{\partial p}{\partial n}$$

Параболическое приближение при малых отклонениях от равновесных плотностей x

$$E_4^0(n) = -\mu_4^0 + \varepsilon_4^0 x_4^2; \quad x_4 = \frac{n}{n_4^0} - 1$$

$$E_3^0(n) = -\mu_3^0 + \varepsilon_3^0 x_3^2; \quad x_3 = \frac{n}{n_3^0} - 1$$

Численные значения параметров:

$$\mu_4^0 = 7.17 \text{ K}; \quad \mu_3^0 = 2.47 \text{ K};$$

$$\varepsilon_4^0 = 13.67 \text{ K}; \quad \varepsilon_3^0 = 6.07 \text{ K};$$

$$n_4^0 = 0.021836 \frac{1}{\text{\AA}^3}; \quad n_3^0 = 0.016355 \frac{1}{\text{\AA}^3};$$

$$n_3^0/n_4^0 = 0.749$$

$$K_4^0(n_4^0) = 16.13 \text{ K}; \quad K_3^0(n_3^0) = 15.34 \text{ K}$$

**Учет следующего члена в разложении E по x
с требованием $E(n=0)=0$**

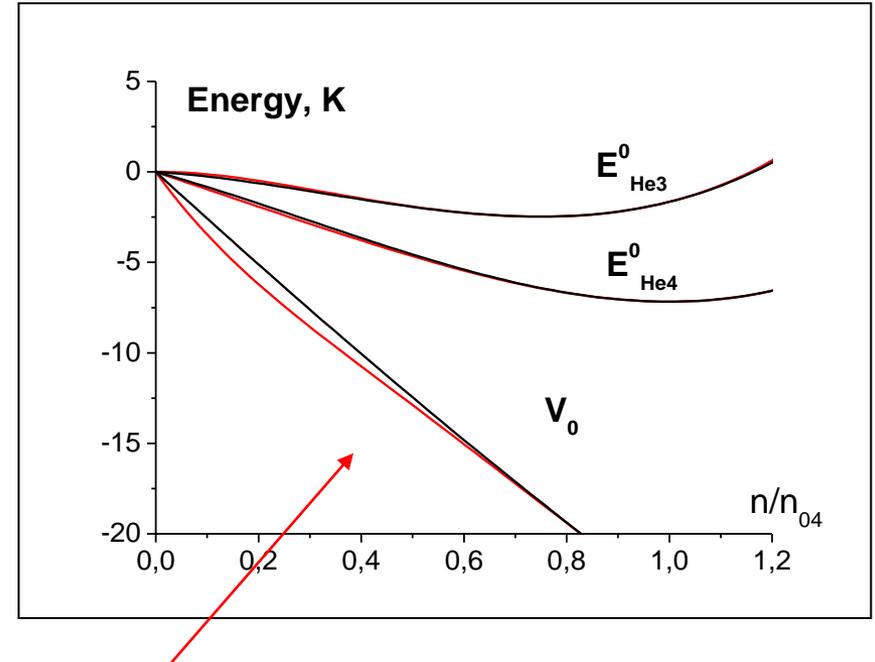
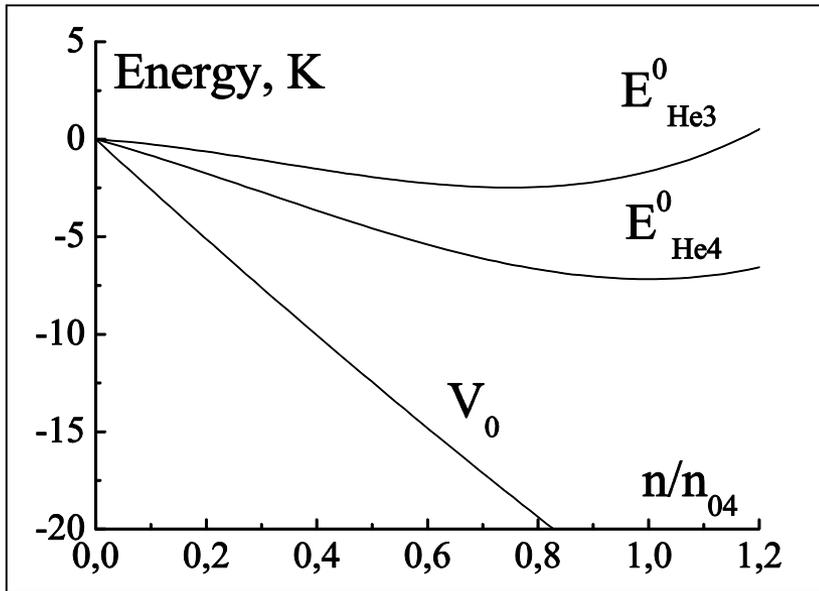
$$E_4^0(n) = -\mu_4^0 + \varepsilon_4^0 x_4^2 (1 + \lambda_4^0 x_4)$$

$$E_3^0(n) = -\mu_3^0 + \varepsilon_3^0 x_3^2 (1 + \lambda_3^0 x_3)$$

$$\lambda_4^0 = 1 - \frac{\mu_4^0}{\varepsilon_4^0} = 0.475; \quad \lambda_3^0 = 1 - \frac{\mu_3^0}{\varepsilon_3^0} = 0.593$$

$$K_4^0(n_4^0) = 16.54 \text{ К}; \quad K_3^0(n_3^0) = 15.75 \text{ К}$$

$K_4^0(n_4^0), K_3^0(n_3^0)$ слабо зависят от точности разложения
по степеням n .



$$V_0 = 4E_4 - 3E_3$$

Графики красного цвета соответствуют представлению энергий в виде полинома 5-й степени.

$$V^0(n) = -25.96 \frac{n}{n_4^0} \times \left[1 - 0.075 \frac{n}{n_4^0} - 0.012 \left(\frac{n}{n_4^0} \right)^2 \right] \text{ K}$$

V_0 – почти линейная функция плотности

Разложение кинетической энергии в ряд по плотности жидкости

$$K_4^0(n) = -18.12 \frac{n}{n_4^0} \times \left[1 - 0.428 \frac{n}{n_4^0} + 0.341 \left(\frac{n}{n_4^0} \right)^2 \right] \text{ К}$$

← полином 3-ей степени

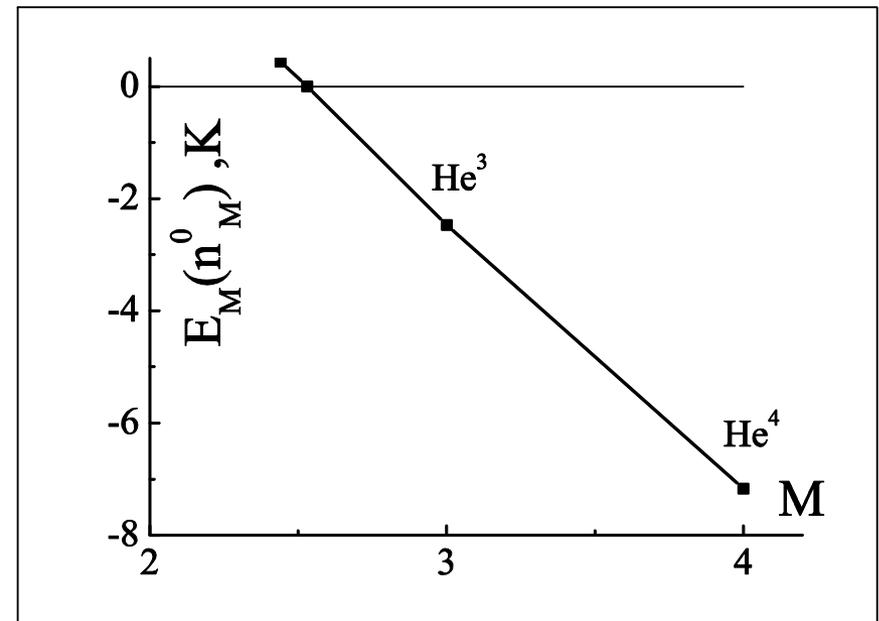
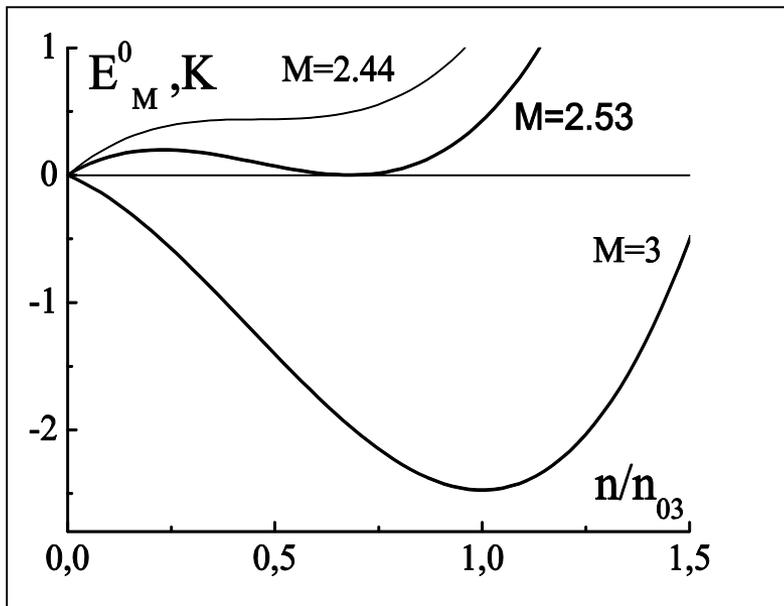
Из-за быстрой сходимости ряда по плотности для потенциальной энергии наблюдаемые величины связаны соотношениями:

$$4(\varepsilon_4^0 - \mu_4^0) \cong 3(\varepsilon_3^0 - \mu_3^0) \left(\frac{n_4^0}{n_3^0} \right)^3 \rightarrow 26 \cong 25.68$$

$$4(3\mu_4^0 - 2\varepsilon_4^0) \cong 3(3\mu_3^0 - 2\varepsilon_3^0) \left(\frac{n_4^0}{n_2^0} \right)^2 \rightarrow 23.3 \cong 25$$

Зависимость энергии основного состояния от массы атома М

$$E_M(n) = 4E_4(n) \left(1 - \frac{3}{M}\right) + 3E_3(n) \left(\frac{4}{M} - 1\right)$$



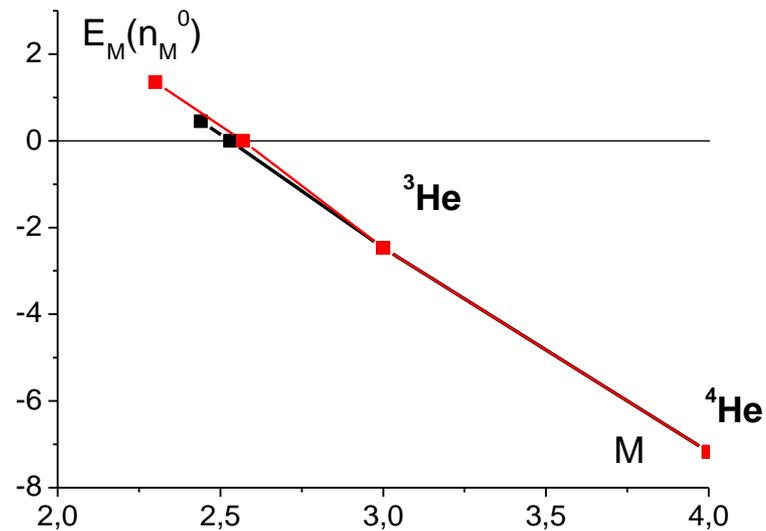
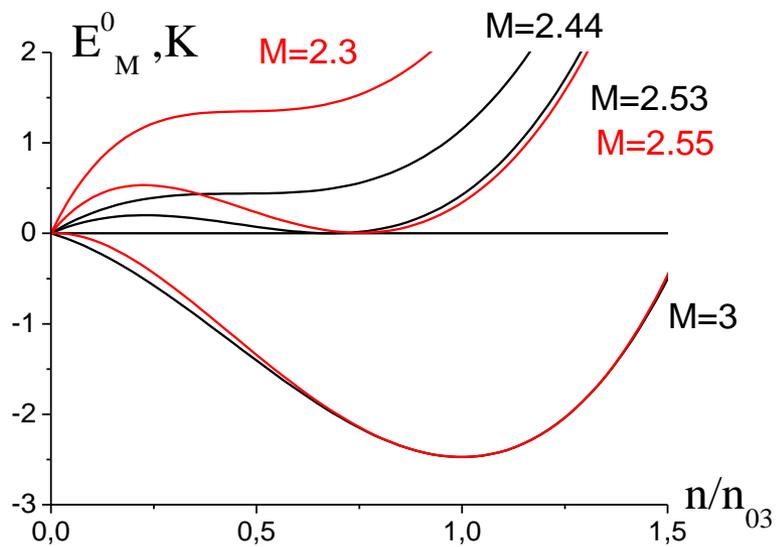
$$M < 2.44$$

$$2.44 < M < 2.53$$

$$M > M_c = 2.53$$

$$E_M(n_M^0) < 0$$

Критическая масса атома (параметр де Бюра $\Lambda_c^2 = 11.2$)



Графики красного цвета соответствуют представлению энергий в виде полинома 5-й степени.

Классический предел

На опыте для жидкого гелия доступна узкая область плотностей:

$$\text{He}^3 \quad n_3^0 < n_3 < 1.4n_3^0$$

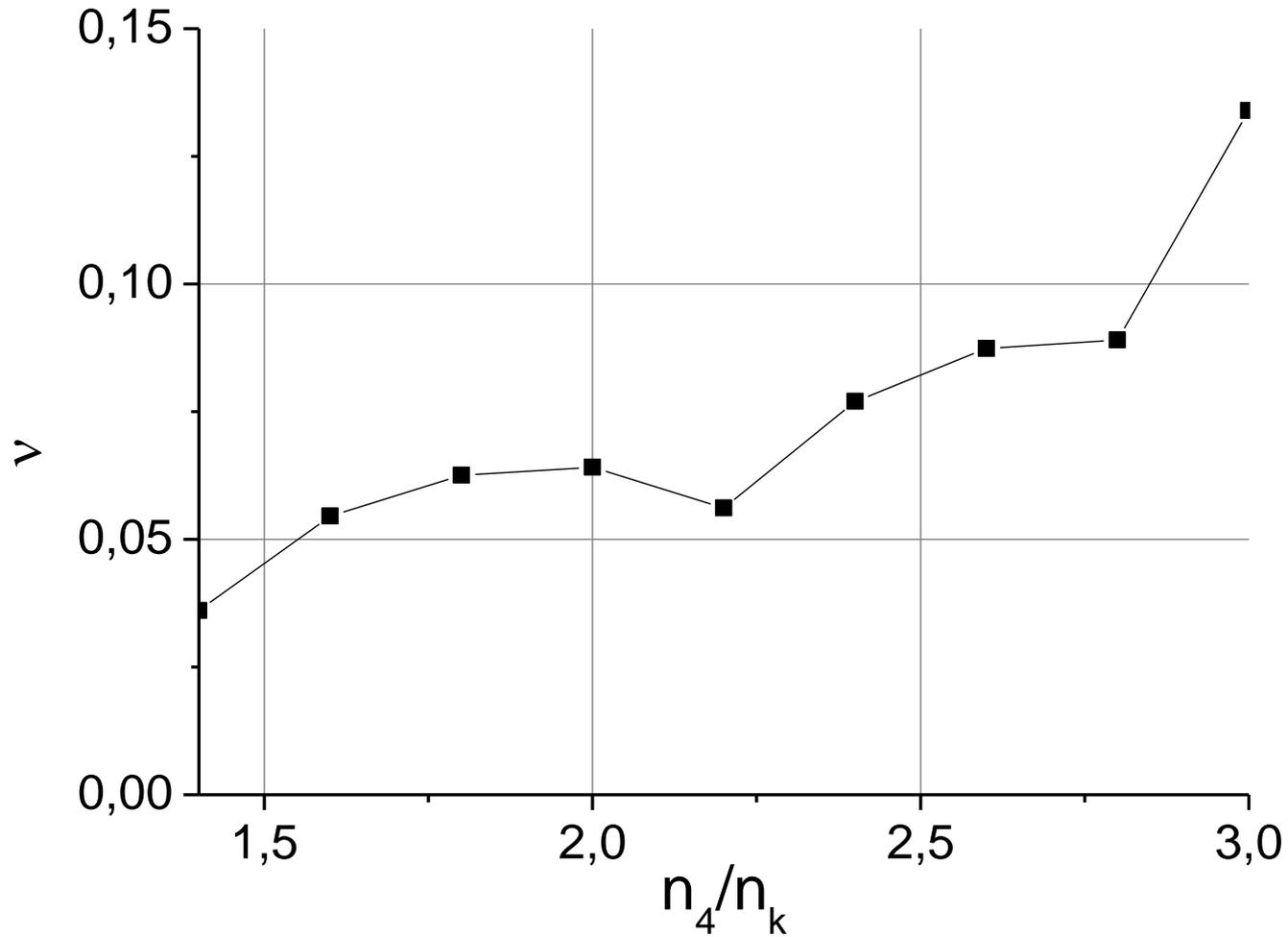
$$\text{He}^4 \quad n_4^0 < n_4 < 1.2n_4^0$$

Как определить $K_3^0(n)$ и $K_4^0(n)$ в области плотностей, где жидкий гелий метастабилен?

Асимптотика энтропии и теплоемкости на одну частицу в классической области температур:

$$S_4(T) = (1 + \nu) \left(\frac{3}{2} \ln \frac{T}{T_S} + \frac{T_C}{T} \right) \quad \nu \ll 1 \text{ - почти как для газа}$$

$$C_4(T) = (1 + \nu) \left(\frac{3}{2} - \frac{T_C}{T} \right)$$

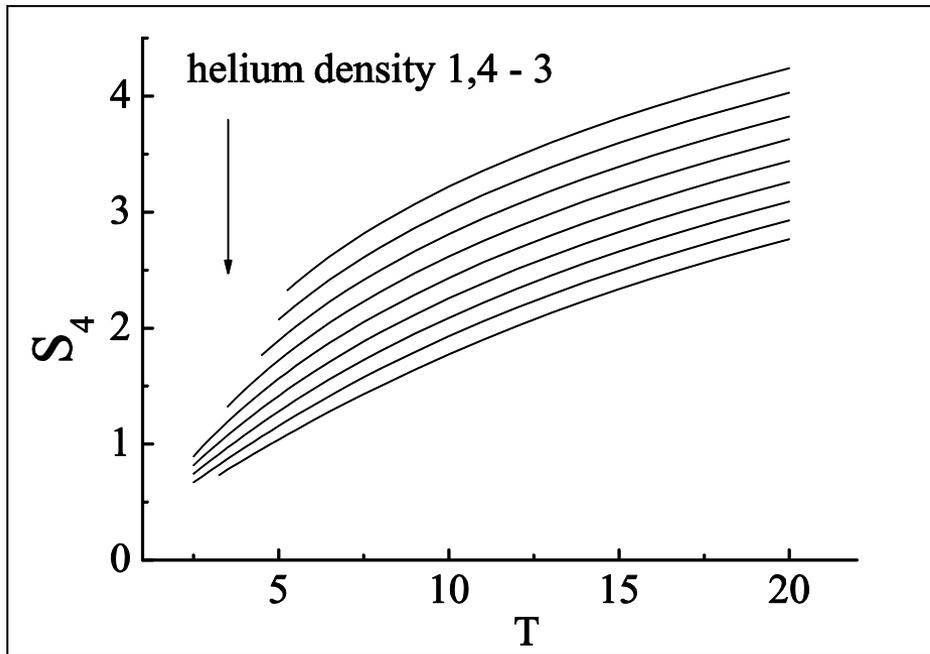


$$n_K = 0.01035 \frac{1}{\text{Å}^3}; n_4^0 = n_K \cdot 2.11$$

Однопараметрическая зависимость энтропии от плотности и температуры:

$$S_4(\rho, T) = (1 + \nu) S_4^* \left(\frac{T}{T_S} \right)$$

Параметры ν , T_C , T_S определены для 9 значений плотности



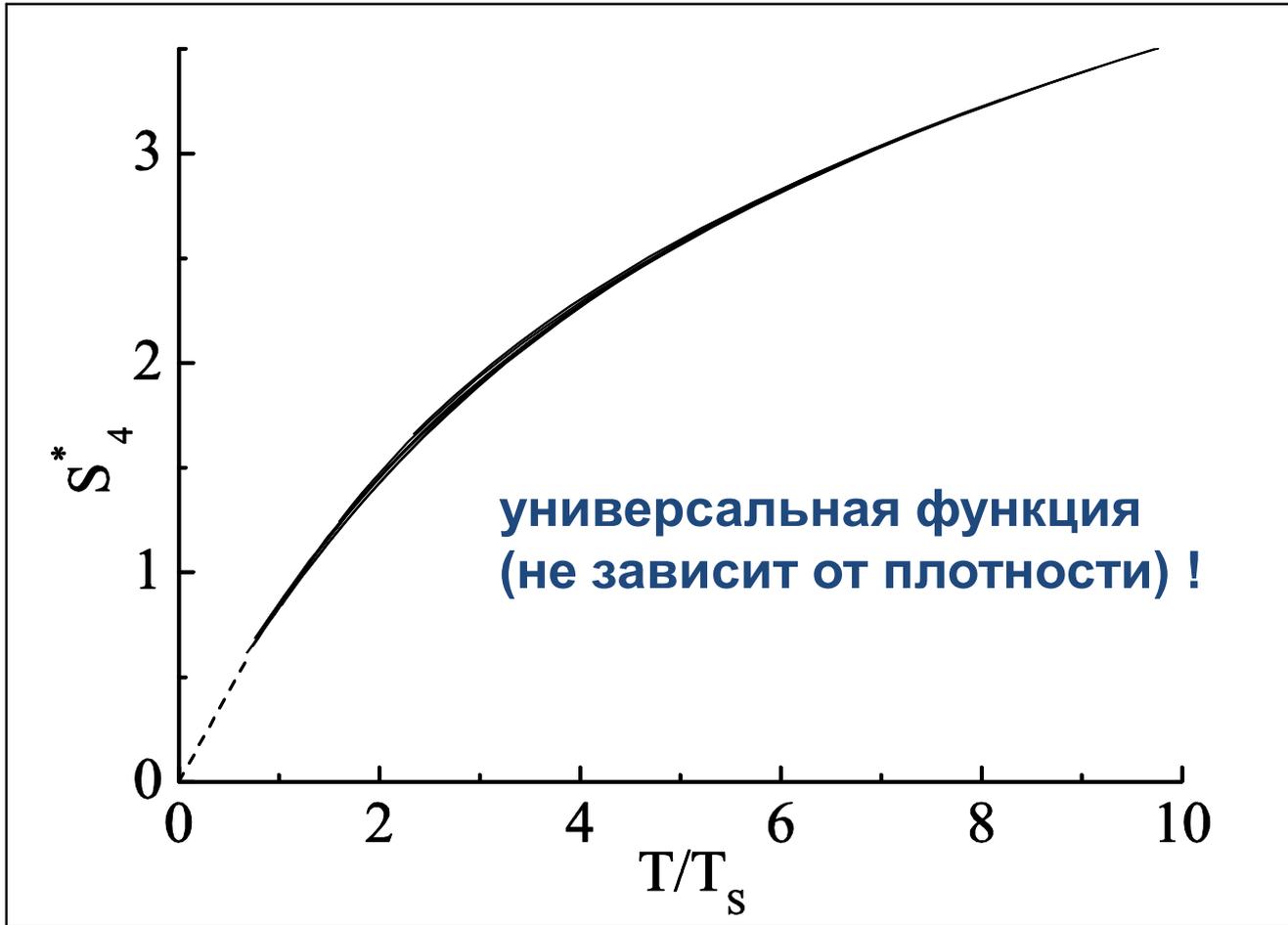
$$K = -M \frac{\partial F}{\partial M} \quad F = E - TS$$

$$T_S \sim M^{-\frac{1}{1+\nu}} \cong \frac{1}{M}$$

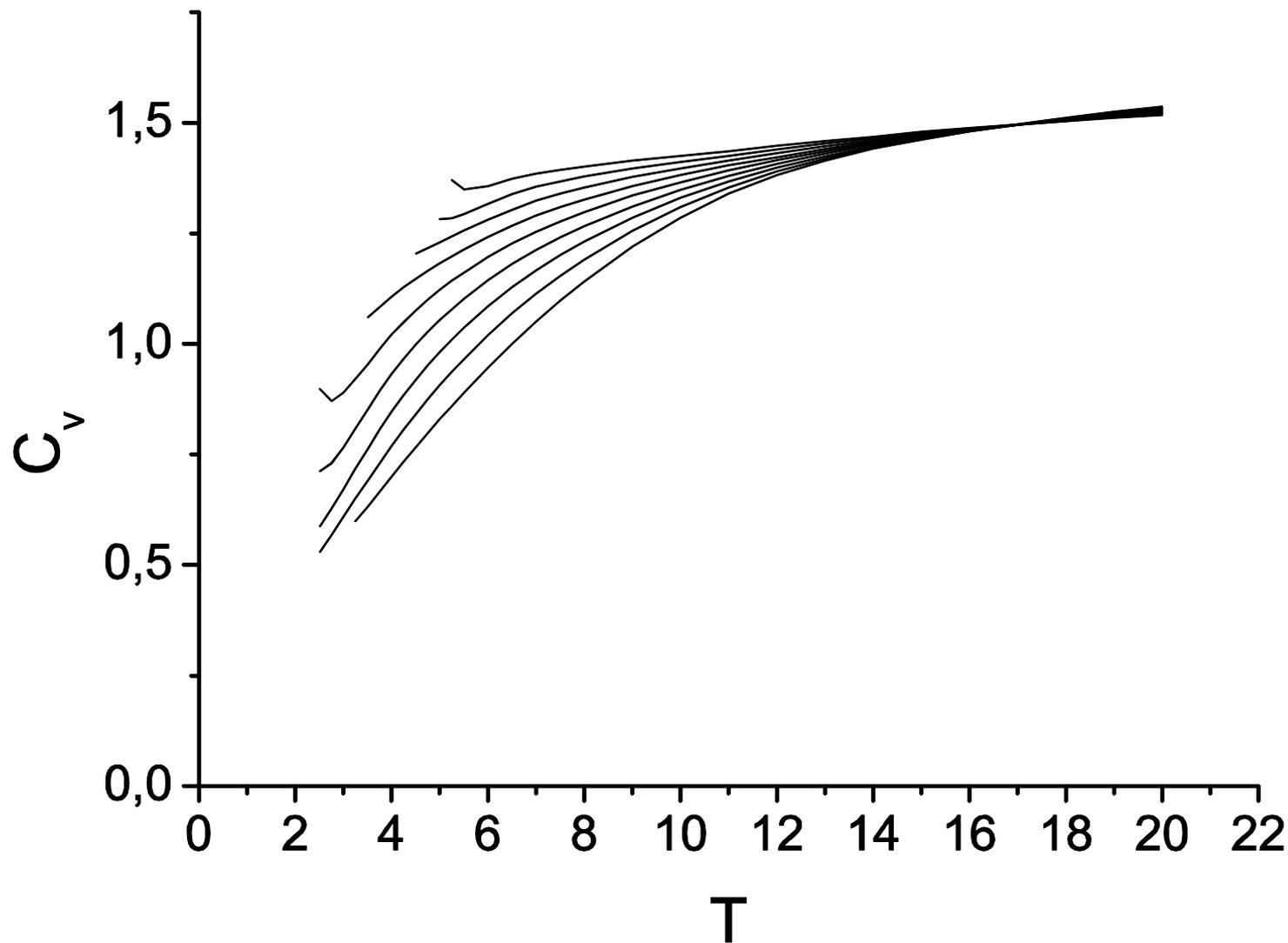
$$C_3(T, n) = C_4 \left(\frac{3}{4} T, n \right)$$

$$S_3(T, n) = S_4 \left(\frac{3}{4} T, n \right) + \ln 2$$

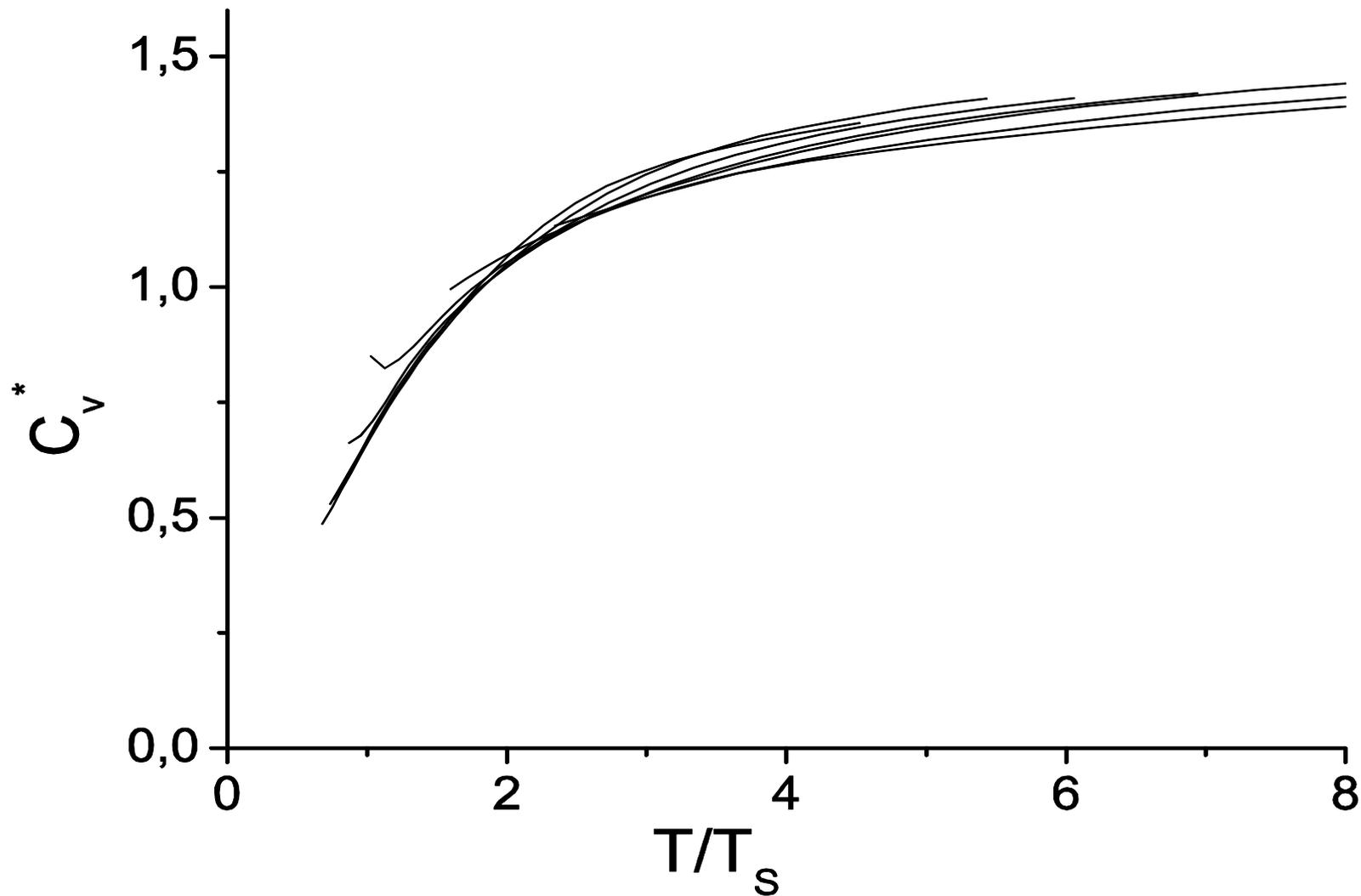
Приведенная энтропия



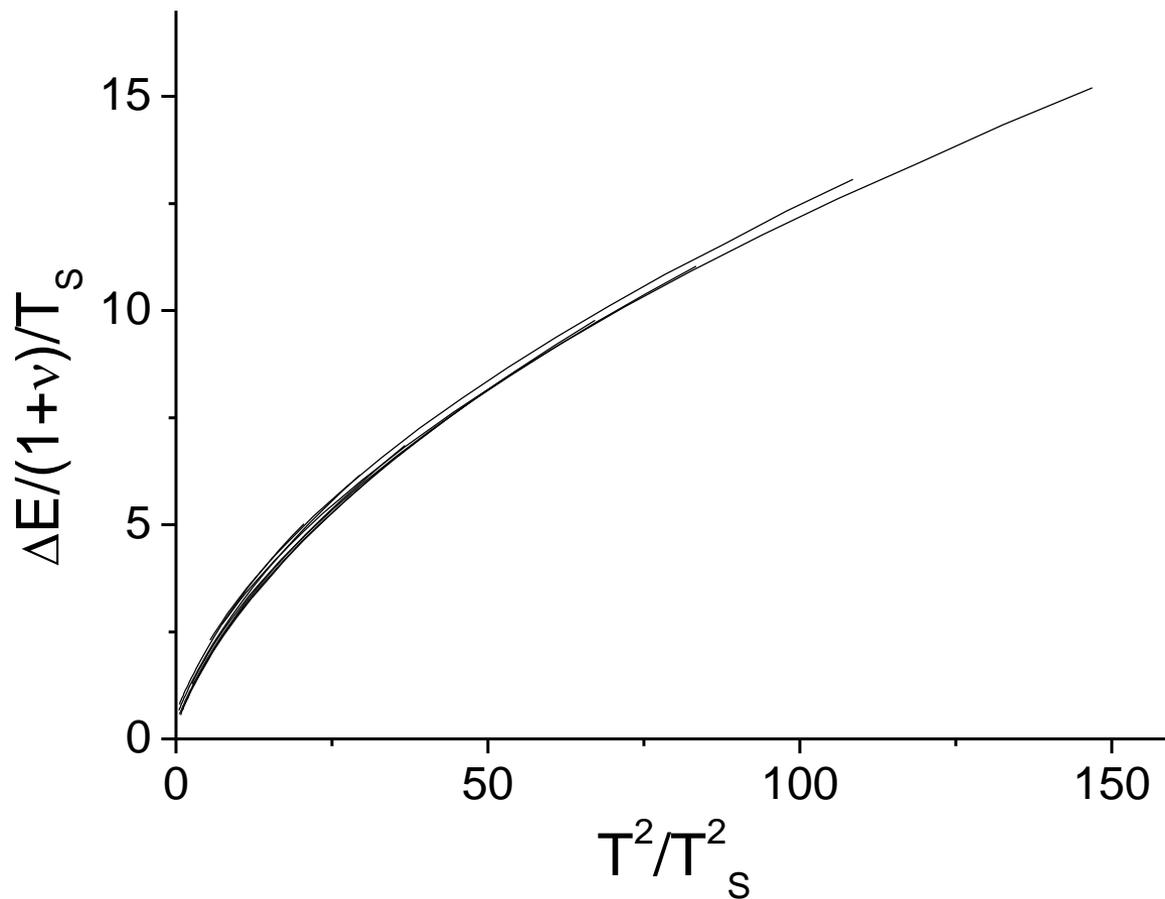
Теплоемкость He^4 при разной плотности



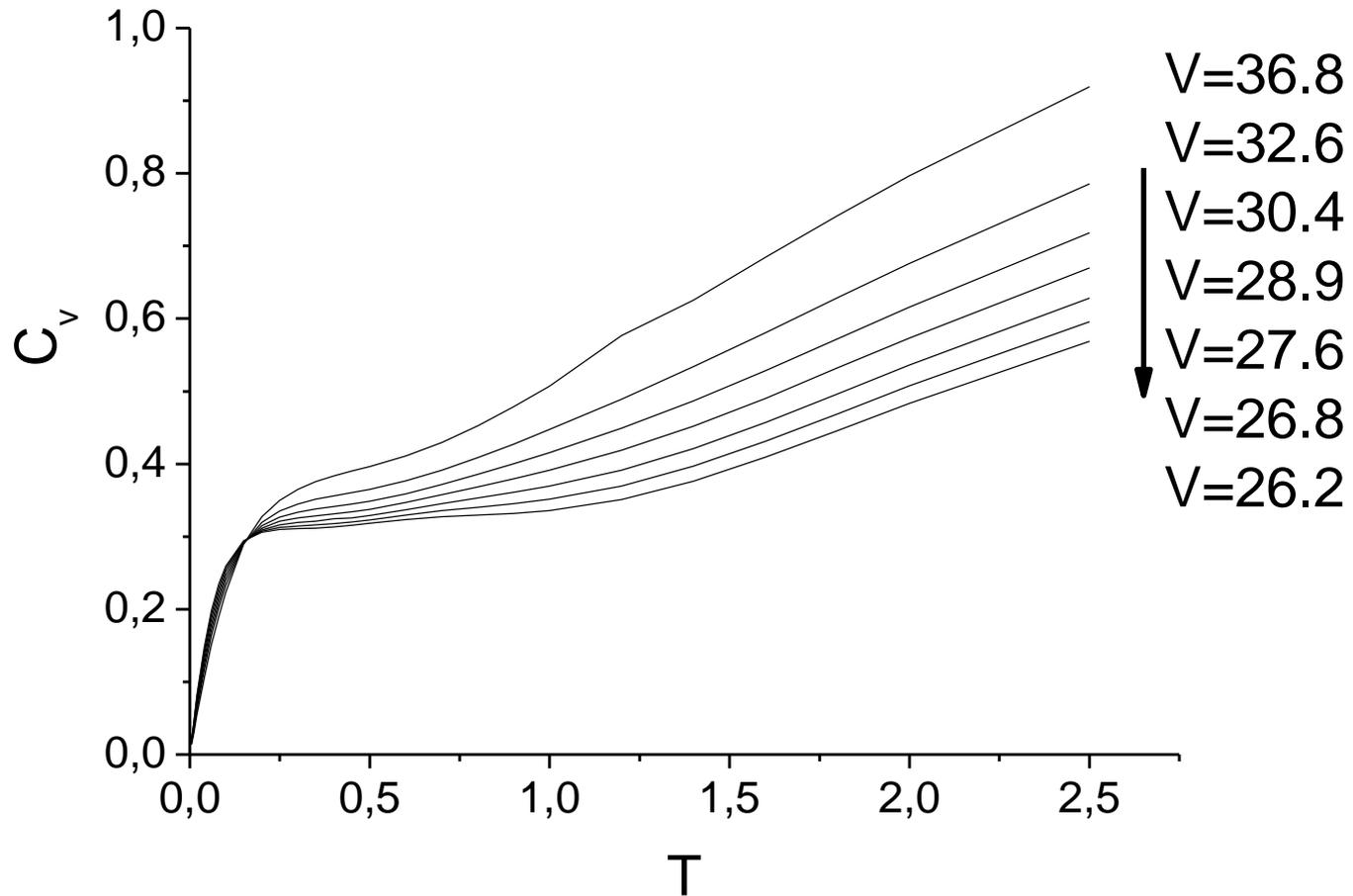
Приведенная теплоемкость He^4 слабо зависит от плотности



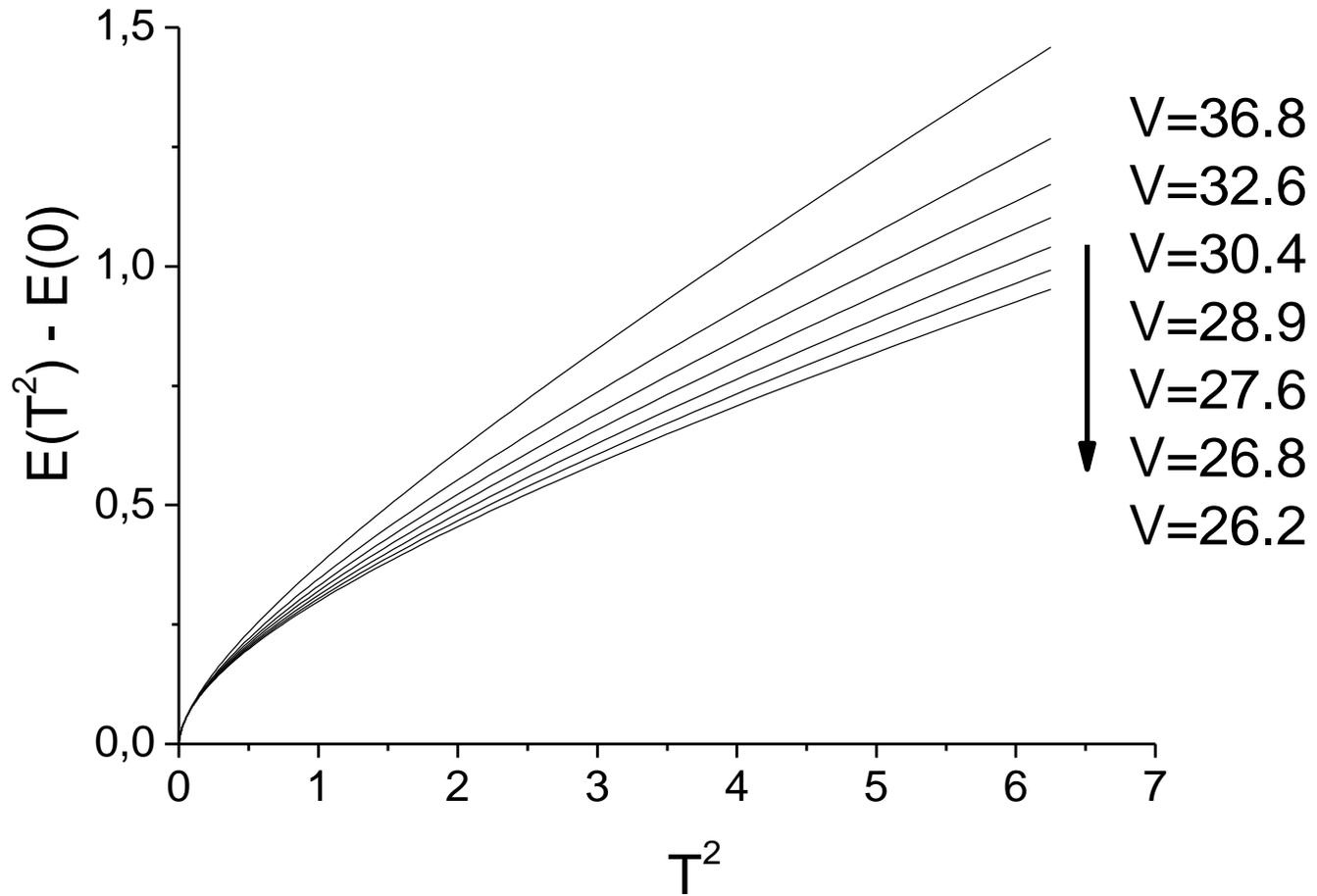
Приведенная энергия He^4 слабо зависит от плотности



Теплоемкость жидкого гелия 3.



Энергия жидкого гелия 3.



Заключение

- определены потенциальные и кинетические энергии атомов в жидком гелии 3 и 4
- определена зависимость энергии основного состояния жидкого гелия от массы атомов
- Кинетические энергии определяют масштаб всех термодинамических характеристик жидкости в области высоких температур, где эффекты статистики не важны