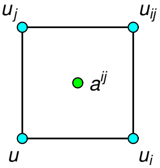
Вариационная формулировка многомерной совместности для дискретных уравнений Лапласа

В.Э. Адлер, А.И. Бобенко, Ю.Б. Сурис

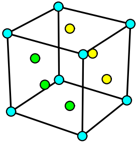
Черноголовка, ИТФ им. Л.Д. Ландау, 25 июня 2013

1. Линейные задачи на одном плакете

Условия совместности $(u_{ij})_k = (u_{ik})_j$ дают 3D нелинейные уравнения типа $Y\Delta$ отображения с трёх граней куба на противоположные:



$\Rightarrow$



Свойство многомерной совместности:

$$(a_k^{ij})_l = (a_l^{ij})_k$$

Пример: уравнение Мутара $\Rightarrow$ звезда-треугольник $\Rightarrow$ **BKP**:

$$u_{ij} = u + \frac{1}{a^{ij}}(u_i - u_j), \quad a^{ij} = -a^{ji} \quad \Rightarrow \quad a_k^{ij} = -\frac{a^{ij} + a^{jk} + a^{ki}}{a^{jk}a^{ki}}$$

$$\frac{a_k^{ij}}{a^{ij}} = \frac{a_j^{ik}}{a^{ik}} \quad \Rightarrow \quad a^{ij} = \epsilon^{ij}\frac{\tau\tau_{ij}}{\tau_i\tau_j}$$

$$\epsilon^{ij}\tau_k\tau_{ij} + \epsilon^{jk}\tau_i\tau_{jk} + \epsilon^{ki}\tau_j\tau_{ki} + \epsilon^{ij}\epsilon^{jk}\epsilon^{ki}\tau\tau_{ijk} = 0$$

2. 2D линейные задачи $\Rightarrow$ 3D нелинейные уравнения

- Дезаргова решётка $\Rightarrow$ **AKP** ($a^{ij} = \epsilon^{ij} \frac{\tau \tau_{ij}}{\tau_i \tau_j}$)

$$u_i - u_j = a^{ij} u \qquad \Rightarrow \qquad \epsilon^{ij} \tau_{ij} \tau_k + \epsilon^{jk} \tau_{jk} \tau_i + \epsilon^{ki} \tau_{ki} \tau_j = 0$$

- Уравнение Мутара $\Rightarrow$ звезда-треугольник $\Rightarrow$ **BKP**

$$u_{ij} = u + \frac{1}{a^{ij}}(u_i - u_j) \quad \Rightarrow \quad a_k^{ij} = -\frac{a^{ij} + a^{jk} + a^{ki}}{a^{jk} a^{ki}} \quad \Rightarrow \quad \dots$$

- **Планарная решётка**

$$u_{ij} = u + C^{ji}(u_i - u) + C^{ij}(u_j - u) \qquad \Rightarrow \qquad \dots$$

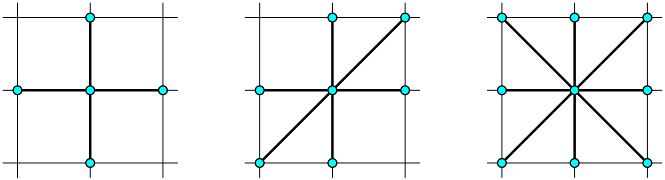
- Система Дарбу–Захарова–Манакова (переменные на рёбрах)

$$u_j^i = u^i + \beta^{ij} u^j \qquad \Rightarrow \qquad \beta_k^{ij} = \frac{\beta^{ij} + \beta^{ik} \beta^{kj}}{1 - \beta^{jk} \beta^{kj}}$$

- Симметричная редукция ($\gamma^{ij} = \gamma^{ji}$) $\Rightarrow$ **CKP**

$$v_j^i = \frac{1}{\sqrt{1 - \gamma^{ij} \gamma^{ji}}}(v^i + \gamma^{ij} v^j) \qquad \Rightarrow \qquad \dots$$

3. Линейные задачи на четырёх плакетах



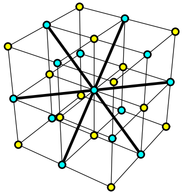
Приложения:

[Santini, Doliwa, Grinevich, Novikov, Dynnikov, Mercat, Bazhanov, Sergeev, ...]

- дискретизация уравнений эллиптического типа (типа Лапласа)
- дискретизация дифф. геометрии и комплексного анализа
- связь со статистическими моделями

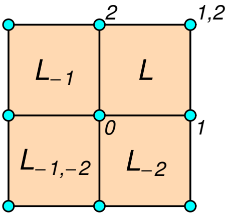
Как выделить интегрируемые случаи?

- ограничение 1-плакетных задач на подрешётку
- **вариационная совместность**



4. Вариационная совместность

Напомним стандартные определения.



- Уравнение **лагранжево**, если оно имеет вид

$$\partial_u(L + L_{-1} + L_{-2} + L_{-1,-2}) = 0,$$

для некоторой функции $L(u, u_1, u_2, u_{12})$ на плакете $\sigma^{12} = (n, n + e_1, n + e_1 + e_2, n + e_2)$.

- **Вариационная симметрия** это преобразование (или дифференцирование), не меняющее действие $S = \sum L$:

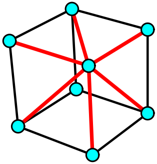
$$L \to \tilde{L} = L + M_1 - M + N_2 - N.$$

Что плохого в этом определении симметрии? Оно **не симметрично**. Нужно уравнять в правах L и M, N.

Определение 1. Пусть на ориентированных двумерных плакетах σ^{ij} в $\mathbb{Z}^d$ задан набор лагранжианов $L = \{L^{ij}\}$ (“дискретная 2-форма”). Уравнениями Эйлера–Лагранжа для L называются уравнения

$$\delta S = 0, \quad S = \sum_{\sigma^{ij} \in \sigma} L^{ij}$$

для действий по **всевозможным** двумерным поверхностям σ в $\mathbb{Z}^d$.

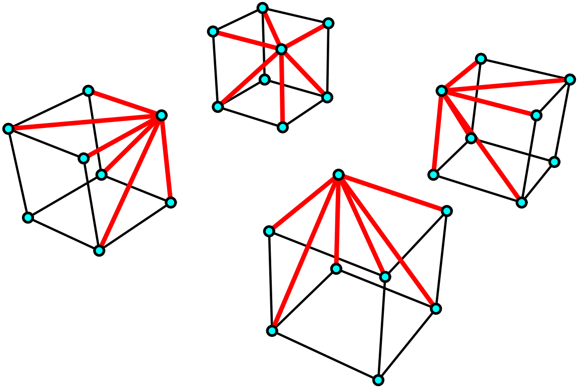


В частности, **разностная дивергенция**

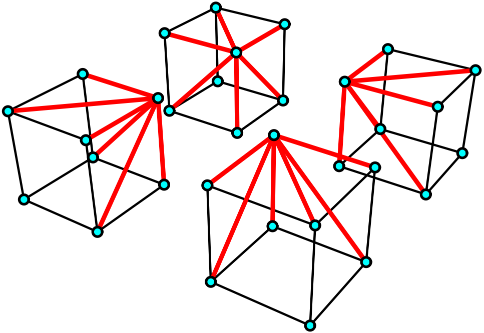
$$(dL)^{ijk} = (T_i - 1)L^{jk} + (T_j - 1)L^{ki} + (T_k - 1)L^{ij}$$

определяет действие на элементарной кубической ячейке. Назовём уравнения Эйлера–Лагранжа для этого действия **элементарными**.

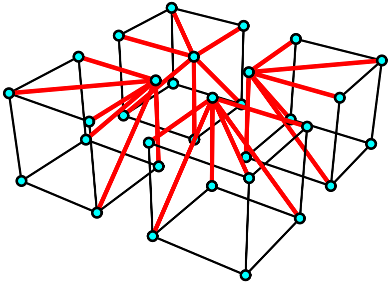
Утверждение. Уравнения Эйлера–Лагранжа для любой двумерной поверхности являются следствием элементарных уравнений.



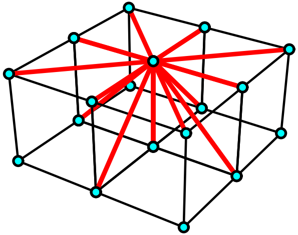
Утверждение. Уравнения Эйлера–Лагранжа для любой двумерной поверхности являются следствием элементарных уравнений.



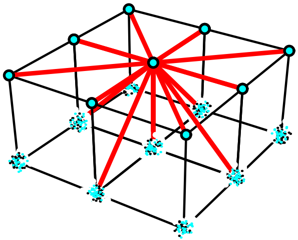
Утверждение. Уравнения Эйлера–Лагранжа для любой двумерной поверхности являются следствием элементарных уравнений.



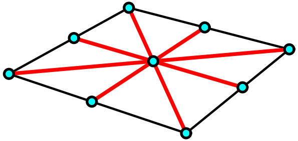
Утверждение. Уравнения Эйлера–Лагранжа для любой двумерной поверхности являются следствием элементарных уравнений.



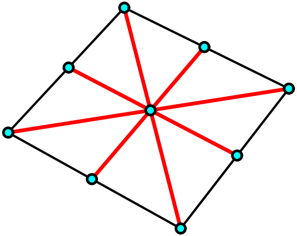
Утверждение. Уравнения Эйлера–Лагранжа для любой двумерной поверхности являются следствием элементарных уравнений.



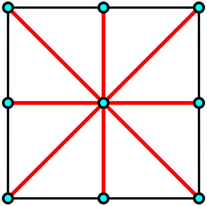
Утверждение. Уравнения Эйлера–Лагранжа для любой двумерной поверхности являются следствием элементарных уравнений.



Утверждение. Уравнения Эйлера–Лагранжа для любой двумерной поверхности являются следствием элементарных уравнений.



Утверждение. Уравнения Эйлера–Лагранжа для любой двумерной поверхности являются следствием элементарных уравнений.

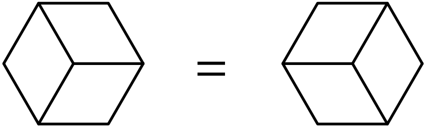


Определение 2 (глобальное). Набор лагранжианов L называется вариационно совместным, если любое **неспециальное** решение уравнений Эйлера–Лагранжа на любой двумерной поверхности может быть достроено до решения на всей решётке $\mathbb{Z}^N$.

Определение 2′ (локальное). Набор лагранжианов L вариационно совместен, если

1) система $\delta(dL)=0$ имеет наименьший возможный **ранг = 2**;
2) $dL=0$ на решениях этой системы (замкнутость 2-формы).

Отметим, что из $\delta(dL)=0$ уже следует $dL=\mathrm{const}$. Для квадратичных лагранжианов, отвечающих линейным уравнениям Эйлера–Лагранжа, свойство 2) выполняется автоматически в силу однородности. Благодаря этому свойству, действие по двумерной поверхности с фиксированной границей не зависит от выбора поверхности (**flip-invariance**).



5. Пример: лагранжево расширение уравнения Мутара

1) Берётся линейная задача на плакете:

$$Mu = u_{ij} - u - \frac{1}{a^{ij}}(u_i - u_j) = 0.$$

2) Подбирается лагранжиан L^{ij} в виде квадратичной формы от u, u_i, u_j, u_{ij}, такой что $\delta L^{ij}/\delta u = 0$ на решениях $Mu = 0$. Ответ не единственный.

3) Выписывается линейная система уравнений $\delta(dL) = 0$ для действия на элементарном кубе.

4) Выписывается условие, что ранг этой системы = 2. Это равносильно нелинейной системе на коэффициенты лагранжиана.

5) Нелинейная система решается, что и даёт отображение для параметров.

В результате, получаем следующее утверждение.

Теорема. Пусть $a^{ij}=-a^{ji}$, $b^{ij}=-b^{ji}$. Лагранжианы

$$L^{ij}=\frac{1}{a^{ij}-b^{ij}}(a^{ij}(u-u_{ij})+u_i-u_j)(b^{ij}(u-u_{ij})+u_i-u_j)$$

вариационно совместны, если и только если эволюция параметров на решётке описывается отображением

$$a^{ij}_k=-\frac{a^{ij}+a^{jk}+a^{ki}}{a^{jk}a^{ki}},\qquad b^{ij}_k=-\frac{b^{ij}+b^{jk}+b^{ki}}{b^{jk}b^{ki}}.$$

Комплексная редукция $a^{ij}=\alpha^{ij}+\mathbf{i}\,\beta^{ij}$, $b^{ij}=\alpha^{ij}-\mathbf{i}\,\beta^{ij}$ приводит к положительно определённой квадратичной форме ("энергия Дирихле")

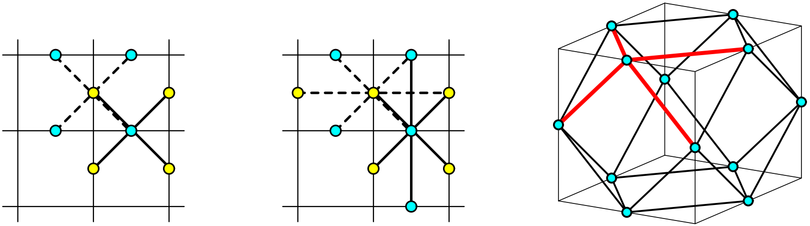
$$L^{ij}=\frac{(\alpha^{ij})^2+(\beta^{ij})^2}{\beta^{ij}}(u-u_{ij})^2+2\frac{\alpha^{ij}}{\beta^{ij}}(u-u_{ij})(u_i-u_j)+\frac{1}{\beta^{ij}}(u_i-u_j)^2.$$

Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа на $\mathbb{Z}^d$ можно принять за определение **плюригармонических** функций.

6. Лагранжианы с переменными на рёбрах

Вариационную совместность можно определить и для лагранжианов вида

$$L^{ij} = L(u^i, u^j, u^i_j, u^j_i).$$



Определение 3. Набор лагранжианов L^{ij} вариационно совместен, если

1) система $\delta(dL) = 0$ имеет наименьший возможный **ранг = 6** (всего на кубо-октаэдре 12 уравнений);

2) $dL = 0$ на решениях этой системы.

7. Заключение

- Построены лагранжевы расширения для всех 1-плакетных линейных задач из Раздела 2.

- Существуют ли другие 4-плакетные линейные уравнения со свойством вариационной совместности — открытый вопрос. Сложность заключается в определении коэффициентов лагранжиана. Можно показать, что число параметров на 1 плакет не более чем 3.

- Нелинейный случай:

$$\begin{array}{rcl} \text{1-плакетные линейные задачи} & \to & \text{квад-уравнения} \\ \text{уравнения типа Лапласа} & \to & \text{уравнения типа Тоды} \end{array}$$

Определение вариационной совместности для квад-уравнений дано в [Lobb & Nijhoff 2009]. Наше определение более общее, так как формулируется сразу для уравнений на 4-х плакетах.